PRO GRADU -TUTKIELMA

Yhtäsuuruus yhtälönratkaisussa

Matematiikan oppikirja-analyysi esiopetuksesta yläkouluun sekä oppimateriaalin luominen yhtäsuuruuden opetukseen

Sini Hänninen

04.06.2020

Helsingin yliopisto
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Ohjaaja: Mika Koskenoja

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

MATEMAATTIS-LUONNONTIETEELLINEN TIEDEKUNTA
MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIGA FAKULTETEN
FACULTY OF SCIENCE

Tiedekunta – Fakultet – Faculty	Koulutusohjelma – Utbildningsprogram – Degree programme
Matemaattis-luonnontieteellinen	Matematiikan aineenopettaja

Tekijä – Författare – Author
Sini Hänninen

Työn nimi – Arbetets titel – Title
Yhtäsuuruus yhtälönratkaisussa – Matematiikan oppikirja-analyysi esiopetuksesta yläkouluun sekä oppimateriaalin luominen yhtäsuuruuden opetukseen

Työn laji – Arbetets art – Level	Aika – Datum – Month and year	Sivumäärä – Sidoantal – Number of pages
Pro Gradu -tutkielma	Kesäkuu 2020	125 + 31 s.

Tiivistelmä – Referat – Abstract

Tässä työssä tutkitaan yhtäsuuruusmerkin esiintymistä matematiikan oppikirjoissa. Tavoitteena on selvittää, vahvistavatko oppimateriaalit yhtäsuuruuden syvällistä ymmärrystä. Lisäksi selvitetään, millaiset määritelmät oppikirjat antavat yhtäsuuruudelle ja yhtälöille sekä millaisia vinkkejä opettajan materiaalit tarjoavat yhtäsuuruuden opetukseen.

Työssä esitellään yhtäsuuruudelle ja yhtälöille matemaattiset määritelmät ja tutustutaan erilaisiin yhtälöihin sekä yhtäsuuruusmerkin kaksiin kasvoihin: sen operationaaliseen ja relationaaliseen puoleen. Lisäksi esitellään matemaattisen tiedon oppimiselle olennaiset käsitteet konseptuaalinen ja proseduraalinen tieto sekä tutustutaan David Tallin (2004) matematiikan kolmeen maailmaan.

Työn teoriapohjan luovat aiemmat tutkimukset yhtäsuuruuden ja yhtälöiden ymmärtämisestä sekä oppimisvaikeuksista ja virhekäsityksistä. Aikaisemmissa tutkimuksissa on havaittu, että yhtäsuuruudesta voi muodostua lapsille virhekäsityksiä jo ennen kouluikää (Carpenter et al., 2003), ja yhtäsuuruusmerkkiin liittyvät virhekäsitykset ovat monesti itsepintaisimpia (Booth et al., 2014). Yhtäsuuruusmerkki esimerkiksi nähdään operaationa ’’anna vastaus’’. Opettajat eivät tunnu kiinnittävän riittävästi huomiota yhtäsuuruusmerkin opettamiseen sen jälkeen, kun se on alakoulussa esitelty (Knuth et al., 2005), eivätkä oppimateriaalit välttämättä tue opettajia sen opettamisessa (Li et al., 2008).

Tutkimuksen aineistona toimi yhteensä 2 esiopetuksen, 24 alakoulun, ja 3 yläkoulun oppikirjaa, joita tutkittiin tutkimuksen kahdessa eri osassa. Ensimmäisessä osassa selvitettiin alakoulun oppikirjojen yhtälötyyppejä ja niiden sijoittumista kategorioihin ja toisessa osassa selvitettiin yhtäsuuruuden ja yhtälöiden määritelmiä sekä opettajan oppaiden vinkkejä opetukseen.

Tämän tutkimuksen päähavainto oli, että yhtäsuuruuden opettamiseen ei kiinnitetä oppikirjoissa riittävästi huomiota eikä sen tärkeyttä mainita yhdessäkään oppikirjassa. Yhtäsuuruudelle ei esitetä määritelmää, mutta yhtälöiden määritelmät ovat pieniä eroja lukuun ottamatta lähes samanlaiset. Lisäksi tutkimuksessa vahvistettiin aiempien tutkimusten havainto, että yhtälöt esitellään pääasiassa muodossa $1 + 2 = 3$, jossa yhtäsuuruusmerkki esiintyy operationaalisena. Tutkimuksen pohjalta luotiin myös täydentävä oppimateriaali yhtäsuuruuden käsitteen sekä yhtäsuuruusmerkin opetukseen esiopetuksesta yläkouluun. Jatkotutkimusaiheita voisivat olla tämän oppimateriaalin testaaminen käytännössä sekä suomalaisten peruskoululaisten yhtäsuuruuden käsitteen ymmärryksen tutkiminen.

Avainsanat – Nyckelord – Keywords
Matematiikka, yhtäsuuruus, yhtälönratkaisu, yhtälö, oppikirja-analyysi, oppimateriaali

Säilytyspaikka – Förvaringställe – Where deposited
Kumpulan tiedekirjasto

Muita tietoja – Övriga uppgifter – Additional information

Sisällys

Liitteet

Luku 1

Johdanto

”Mihin näitä yhtälöitä oikein tarvii?” Veikkaan, että lähes jokainen matematiikan opettaja kohtaa oppitunneillaan oppilaita, jotka kyseenalaistavat matematiikan oppisisältöjen merkityksen. Yläkouluikäisten voi myös olla vaikea hahmottaa ilman opettajan ohjausta, miten monessa ammatissa ja arkipäivän ongelmassa matematiikasta on hyötyä. Yhtälöillä on valtavasti sovelluksia arjen ongelmanratkaisutehtävistä maalin riittoisuus- ja lääkelaskuihin. Myös fyysikko ratkoo työssään monenlaisia monimutkaisia yhtälöitä.

Alakoulun konkreettisen aritmetiikan laajentaminen yläkoulun abstraktiin algebralliseen ajatteluun on erityisen merkityksellinen (Ko & Karadag, 2013) ja tutkimuksissa on todettu tämän siirtymän olevan oppilaille hankala (Ko & Karadag, 2013; Carpenter, Franke, & Levi, 2003). Algebran myötä mukaan tulevat muun muassa abstraktit tuntemattoman ja muuttujan käsitteet, jotka voivat olla hyvin haastavia oppilaille. Yhtälöiden ymmärtäminen kuitenkin vaatii tätä uudenlaista abstraktimpaa ajattelua. Koska algebra sisältää abstrakteja uusia sisältöjä, yhtälönratkaisussa kohdataan monenlaisia haasteita ja virhekäsityksiä, jotka Booth, Barbieri, Eyer & Paré-Blagoev (2014) jakavat kuuteen käsitteeseen: muuttujat, miinusmerkki, yhtäsuuruus/erisuuruus, laskutoimitukset, murtoluvut ja matemaattiset ominaisuudet. Tutkijat kokevat erityisen huolestuttavana yhtäsuuruuden käsitteen heikon ymmärryksen ja siihen liittyvien virheiden lisääntymisen kouluvuoden edetessä ja kehottavat käyttämään runsaasti aikaa käsitteen ymmärtämisen vahvistamiseen (Booth, Barbieri, Eyer, & Paré-Blagoev, 2014).

Yhtäsuuruuden relationaalinen ymmärrys on yhtälönratkaisussa tärkeää (Falkner, Levi, & Carpenter, 1999; Ko & Karadag, 2013) ja yhtäsuuruusmerkin opettamiseen pitäisi kiinnittää enemmän huomiota (McNeil & Alibali, 2005a; Alexandrou-Leonidou & Philippou, 2007). Lapsille voi muodostua virheellinen käsitys yhtäsuuruusmerkistä jo ennen kouluikää ja se pitäisi ottaa huomioon, kun opetuksessa otetaan ensimmäisen kerran esille laskutoimitukset (Falkner et al., 1999). Oppimiseen vaikuttavat myös opettajien näkemykset opettamisesta ja opetettavasta asiasta (Gonzalez Thompson, 1984; Hihnala, 2005).

Tässä tutkimuksessa pyrin selvittämään jo olemassa olevan oppimateriaalin avulla, millaisia yhtälöitä alakoulun oppikirjat sisältävät ja ohjaavatko kirjojen tehtävät yhtäsuuruusmerkin operationaaliseen vai relationaaliseen ymmärrykseen. Tämän lisäksi tutkin ala- ja yläkoulun oppikirjojen määritelmiä yhtäsuuruuden ja yhtälöiden osalta. Aiemman tutkimuksen sekä oppikirja-analyysin tulosten pohjalta olen luonut täydentävän oppituntipaketin yhtäsuuruusmerkin opettamiseen esi- ja alkuopetuksessa sekä sen relationaalisen ymmärryksen vahvistamiseen ala- ja yläkoulussa. Arvioin tätä tuotettua oppimateriaalia ja sen soveltuvuutta yhtäsuuruusmerkin opetukseen kirjallisuuden pohjalta.

Luvussa 2 esittelen tärkeintä teoriaa ja käsitteitä. Pyrin hahmottelemaan, miten yhtälö ja yhtäsuuruus määritellään matemaattisesti, miten oppilaat oppivat matematiikkaa ja mitkä asiat oppimiseen vaikuttavat. Millaisia vaikeuksia matematiikan oppimisessa kohdataan ja miten näitä voitaisiin välttää? Kolmannessa luvussa esittelen aiempaa tutkimusta edeten ensin aritmetiikasta algebraan ja yhtälöihin sekä yhtäsuuruuden käsitteeseen. Neljäs luku keskittyy yhtälöiden ja yhtäsuuruuden opettamiseen sekä näiden käsitteiden esiintymiseen opetussuunnitelmien perusteissa. Viidennessä luvussa esittelen tutkimuksen toteutuksen sekä tutkimuskysymykset. Tutkimustulosten sekä tulosten tarkastelun kautta päädyn pohtimaan, millainen kuva yhtäsuuruudesta seitsemännelle luokalle siirtyvällä oppilaalla on muodostunut alakoulun aikana.

Luku 2

Teoriaa ja käsitteitä

Matematiikka tuntuu olevan monelle vaikeatajuista ja haasteet opiskelussa alkavat usein jo alakoulun puolella. Matematiikan oppimiseen vaikuttavat monet asiat, kuten oppilaiden uskomukset matematiikasta ja itsestään oppijana. Tämän lisäksi oppimiseen vaikuttavat myös opetus ja opetukseen puolestaan vallalla oleva oppimiskäsitys, opetussuunnitelma, käytössä oleva oppimateriaali sekä opettajan omat käsitykset ja uskomukset matematiikasta. Opettajan opetuksesta huolimatta, tai siitä johtuen, oppilaille voi muodostua virhekäsityksiä, joita voi joskus olla haastava korjata. Matematiikan oppimisvaikeudet voivat myös olla hyvin perustavanlaatuisia, jolloin puhutaan dyskalkuliasta. Seuraavaksi esittelen tutkimuksen kannalta tärkeimpiä käsitteitä sekä teoriaa.

2.1 Yhtälön ja yhtäsuuruuden määritelmät

Tutkimukseni ytimessä ovat yhtälöt sekä yhtäsuuruuden käsite. Tämän vuoksi on tärkeää pohtia, miten nämä käsitteet määritellään matemaattisesti ja mitä ne tarkoittavat. Määritelmien lisäksi olen pohtinut myös sitä, miten nämä käsitteet voidaan ymmärtää useammalla tavalla ja esitellyt muutaman näkökulman esimerkkeineen.

Yhtälön määritelmä

Määritelmä 2.1. Yhtälö on kahden matemaattisen lausekkeen välinen yhtäsuuruus (Clapham & Nicholson, 2014).

Erilaisia yhtälöitä

Määritelmä 2.2. Jos yhtäsuuruus on voimassa kaikilla yhtälön muuttujan arvoilla, on kyseessä *identtinen yhtälö*, jos vain joillakin muuttujan arvoilla, on kyseessä *ehdollinen yhtälö*. (Clapham & Nicholson, 2014)

Identtistä yhtälöä kutsutaan myös myös ehdottomaksi yhtälöksi tai identiteetiksi ja sitä merkitään joissakin tapauksissa yhtäsuuruusmerkin $=$ sijaan identtisellä yhtäsuuruudella $\equiv$. Ehdollisen yhtälön ratkaisuja kutsutaan yhtälön juuriksi. (Clapham & Nicholson, 2014)

Esimerkiksi yhtälö $2(4-x) = 8-2x$ on identtinen. Kun yhtälön vasemmalta puolelta kerrotaan sulkeet auki saadaan ensin $2 \cdot 4 + 2 \cdot (-x)$ ja edelleen $8-2x$. Näin päädytään täsmälleen samaan muotoon yhtälön oikean puolen kanssa, jolloin yhtä suuret termit kumoavat toisensa. Yhtälö $0 = 0$ on identtisesti tosi ja yllä annettu yhtälö tosi kaikilla muuttujan x arvoilla. Sen sijaan yhtälö $x^2 + 3x - 4 = 0$ ei ole identtinen. Yhtälölle saadaan ratkaisut $x = 1$ ja $x = -4$, jotka ovat alkuperäisen yhtälön juuret. Yhtälö ei siis ole tosi kaikilla muuttujan x arvoilla.

Edellä esiteltyä yhtälöiden jakoa identiteetteihin ja ehdollisiin yhtälöihin käyttää myös Attorps (2006) väitöskirjassaan. Tulososiossa Attorps on jakanut yhtälöt identiteetteihin $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ ja $cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$ sekä ehdollisiin yhtälöihin. Ehdolliset yhtälöt on jaettu neljään kategoriaan:

1. epäalgebralliset yhtälöt, esimerkiksi $y''(x) + y(x) = 0,5cos2x$ ja $\int f(x)dx = x^2 + C$,
2. yhtälöt, joissa on yksi tai useampi tuntematon tekijä, kuten $a^{\ln a} = e$ ja $V = \frac{4\pi r^3}{3}$,
3. triviaaliyhtälöt, esimerkiksi $x = 2$ sekä
4. funktiot, esimerkiksi $f(x) = 2x + 1$. (Attorps, 2006)

Yhtälöt voidaan jakaa myös niiden aritmeettisuuden mukaan. Aritmeettiset yhtälöt ovat muotoa $Ax + B = C$ tutkijoiden Filloy & Rojano (1989) mukaan. Yhtälön vasen puoli sisältää operaatioita, joita tuotetaan tuntemattomille ja tunnetuille luvuille, ja oikea puoli vastaa näiden operaatioiden aikaansaamaa seurausta. Aritmeettisen yhtälön ratkaiseminen lähtee liikkeelle suorittamalla käänteiset operaatiot yhtälön oikean puolen luvulle C. (Filloy & Rojano, 1989) Vlassis (2002) määrittelee tämän tulkinnan pohjalta aritmeettisen yhtälön olevan yhtälö, jossa vain yksi yhtälön jäsen sisältää tuntemattoman. Hän jakaa aritmeettiset yhtälöt vielä kahteen kategoriaan:

1. Konkreettiset aritmeettiset yhtälöt, joissa tuntematon esiintyy vain yhdessä termissä ja jotka sisältävät vain luonnollisia lukuja.

2. Abstraktit aritmeettiset yhtälöt, joissa sama tuntematon voi esiintyä useammassa termissä yhtälön vasemmalla puolella. (Vlassis, 2002)

Epäaritmeettiset yhtälöt ovat tutkijoiden Filloy & Rojano (1989) mukaan sellaisia, joissa aritmeettinen ymmärrys yhtälöstä ei enää riitä, vaan laskutoimituksia suoritetaan myös tuntemattomalle. Tutkijoiden mukaan epäaritmeettiset yhtälöt ovat muotoa $Ax + B = Cx + D$. Tätä muotoa olevien yhtälöiden ymmärtämisen edellytys on tutkijoiden mukaan ymmärtää se, että yhtäsuuruusmerkin molemmin puolin olevat lausekkeet ovat samantyyppisiä. Näiden kahden lausekkeen välillä oleva yhtäsuuruus tulee selvemmäksi esimerkiksi sijoittamalla tuntemattoman paikalle jokin lukuarvo. (Filloy & Rojano, 1989) Vlassis määrittelee tämän pohjalta epäaritmeettisen yhtälön olevan yhtälö, jonka molemmat puolet sisältävät tuntemattoman. Hän jakaa epäaritmeettiset yhtälöt niiden ominaisuuksien mukaan seuraavasti:

1. Esialgebralliset yhtälöt, jotka voidaan johtaa jostakin mallista ja jotka sisältävät vain yksinkertaisia laskutoimituksia, kuten luonnollisten lukujen yhteen- ja vähennyslaskua.

2. Algebralliset yhtälöt, joita ei voi palauttaa kuvaamaan konkreettista mallia, vaan ne ovat abstraktimpia. (Vlassis, 2002)

Yhtäsuuruuden määritelmä

Määritelmä 2.3. Yhtäsuuruusmerkki on relaatio kahden yhtä suuren luvun tai lausekkeen välillä (Carpenter et al., 2003).

Yhtäsuuruus voi kuulostaa yksinkertaiselta, mutta sanana se sisältää useamman merkityksen ja toisaalta myös mahdollisuuksia väärintulkintaan. Burgin (2018) esittelee yhtäsuuruudelle useita määritelmiä. Hänen mukaansa yhtäsuuruutta pystyy ymmärtämään matematiikan saralla paremmin seuraavien kolmen termin määritelmien kautta: identtisyys, yhtäsuuruus ja ekvivalenssi. Näiden hierarkia menee hänen mukaansa ensimmäisestä jälkimmäiseen. Identtisyys määrittää kaksi objektia samoiksi, merkitään $a \equiv a$, kun taas yhtäsuuruus ehdottaa, että kaksi objektia voivat olla samoja, merkitään $a = b$. Ekvivalenssi puolestaan määrittelee hänen mukaansa sen, milloin kaksi objektia voivat olla keskenään vaihdannaisia, merkitään $a \sim b$. (Burgin, 2018)

Burgin (2018) ehdottaa yhtäsuuruuden käsitteen yhdeksi osamääritelmäksi identtisyyden, jota käsiteltiin edellä myös identtisen yhtälön kohdalla. Vapaasti kuvailtuna identtisyyden voisi sanoa olevan sama kuin yksi yhteen vastaavuus tai tosi yhtäsuuruus. Geometrian parissa identtisyydestä puhutaan yhtenevyytenä ja algebrassa identtisinä kuvauksina (Burgin, 2018). Tässä tutkimuksessa keskityn kuitenkin yhtäsuuruuden ymmärtämiseen yhtälönratkaisun näkökulmasta ekvivalenssirelaationa, joten jätän geometrisen tulkinnan sekä identtisen kuvauksen määrittelemättä. Esittelen seuraavaksi ekvivalenssirelaation, jota ennen palaan vielä askeleen taaksepäin relaation määritelmään, sillä matematiikassa asioiden väliset suhteet ovat relaatioita.

Relaatio

Määritelmä 2.4. Olkoon R *relaatio*. Jos $(a, b) \in R$, niin a on relaatiossa b:n kanssa. Merkitään aRb tai vaihtoehtoisesti $R(a, b)$.

Relaatio on joukko, jonka jokainen alkio on järjestetty pari (a, b) (Junnila, 2011). Relaatiota merkitään yleensä kirjaimella R, mutta sitä voidaan merkitä myös jollakin muulla tavalla, esimerkiksi symboleilla $\leqslant, \subset, \equiv, =$ tai $\sim$ (Häsä & Rämö, 2013).

Ekvivalenssirelaatio

Määritelmä 2.5. Olkoon R joukon A relaatio. Relaatio R on *ekvivalenssirelaatio*, jos kaikilla $a, b, c \in A$ relaatiolle R pätevät seuraavat ehdot:

1. *Refleksiivisyys.* aRa, eli alkio a on relaatiossa itsensä kanssa.

2. *Symmetrisyys.* Jos aRb, niin bRa. Toisin sanoen, jos a on relaatiossa b:n kanssa, niin b on relaatiossa a:n kanssa.

3. *Transitiivisuus.* Jos aRb ja bRc, niin aRc. Siis, jos a on relaatiossa b:n kanssa ja b on relaatiossa c:n kanssa, niin a on relaatiossa c:n kanssa.

Algebrassa on tärkeää pystyä luokittelemaan eri olioita ja tähän voidaan käyttää ekvivalenssirelaatiota (Häsä & Rämö, 2013). Algebrassa ekvivalenssirelaatiota merkitään yleensä symbolilla $\sim$. Jos $a \sim b$, niin sanotaan, että alkio a on ekvivalentti alkion b kanssa. Koska ekvivalenssirelaatiolla on symmetriaehto, voidaan myös sanoa, että alkiot a ja b ovat ekvivalentit. Määritelmän 2.5 mukaan relaatio R on ekvivalenssirelaatio täsmälleen silloin, kun se on sekä refleksiivinen, symmetrinen että transitiivinen (Häsä & Rämö, 2013) Yhtäsuuruusmerkki $=$ on siis relaatio, mutta vielä tarkemmin se on ekvivalenssirelaatio seuraavalla ehdolla: $x = y$, jos x on yhtä suuri kuin y.

Yhtäsuuruusmerkin kahdet kasvot

Yhtäsuuruusmerkillä on monia merkityksiä, kuten edellä kuvattiin. Näistä tärkeimmäksi tutkijat Behr, Erlwanger & Nichols (1980) mainitsevat identtisyyden (*sameness*). Tutkijoiden mukaan tämä on luonnollinen tapa ymmärtää yhtäsuuruus kahden joukon välillä ja tapa, jonka haluamme esitellä lapsille. Yhtäsuuruusmerkin ymmärtäminen ekvivalenssirelaationa on kuitenkin tutkijoiden mukaan sivistyneempi. (Behr, Erlwanger, & Nichols, 1980)

Yhtäsuuruusmerkillä on sekä operationaalinen että relationaalinen puoli. Mirin (2019) toteaa tutkimuksessaan, että nämä kaksi yhtäsuuruusmerkin käsitystapaa esitellään monessa tutkimuksessa, mutta niitä ei useinkaan määritellä tarkasti. Mirinin mukaan kirjallisuudessa käsitellään yhtäsuuruusmerkin operationaalista ymmärrystä heikkona ymmärryksenä, johon kuuluu merkin näkeminen vain suoritettavana operaationa. Yhtäsuuruusmerkin relationaalisuus määritellään Mirinin mukaan eri tutkimuksissa hyvin eri tavoin, mutta yhteistä määritelmille on se, että relationaalinen ymmärrys yhtäsuuruusmerkistä on se oikea ja tavoiteltava. (Mirin, 2019)

Yhtäsuuruusmerkin ymmärryksen jako pelkkään operationaaliseen ja relationaaliseen on tutkijoiden Rittle-Johnson, Matthews, Taylor & McEldoon (2011) mielestä liian heikko. Tutkijat ovat lisänneet tähän kahtiajakoon kaksi lisätasoa: yhden operationaalisen ja relationaalisen väliin ja yhden relationaalisen yläpuolelle. Tasot ovat alimmasta korkeimpaan seuraavat:

1. jäykkä operationaalinen (*rigid operational*),
2. joustava operationaalinen (*flexible operational*),
3. alkeellinen relationaalinen (*basic relational*) ja
4. suhteellinen relationaalinen (*comparative relational*).

Ensimmäinen eli jäykkä operationaalinen taso on ymmärryksen alin taso, josta tutkijoiden Rittle-Johnson et al. (2011) mukaan käsitys yhtäsuuruusmerkistä lähtee liikkeelle. Tämä on taso, jolla yhtäsuuruusmerkki ymmärretään muodossa ”anna vastaus” ja yhtälö on muodossa $a + b = c$, jossa operaatioita on vain yhtälön vasemmalla puolella. Tämän ensimmäisen tason tutkijat sanovat vastaavan yleisimmin tutkimuksissa esiintyvää käsitystä yhtäsuuruusmerkin operationaalisuudesta. (Rittle-Johnson, Matthews, Taylor, & McEldoon, 2011)

Toisella eli joustavalla operationaalisella tasolla kyetään tutkijoiden Rittle-Johnson et al. (2011) mukaan ymmärtämään, arvioimaan ja ratkaisemaan epätyypillisiäkin yhtälömuotoja, jotka kuitenkin ymmärretään vielä operationaalisen yhtäsuuruuden kautta. Yhtälöt ovat joko muotoa, jossa operaatiot ovat oikealla, kuten yhtälössä $c = a + b$ tai eivät sisällä operaatioita lainkaan, kuten yhtälö $a = a$. (Rittle-Johnson et al., 2011)

Kolmas taso eli alkeellinen relationaalinen on tutkijoiden Rittle-Johnson et al. (2011) mukaan se, joka esiintyy tutkimuksissa yleisimmin termillä relationaalinen. Tällä tasolla yhtäsuuruusmerkki kyetään jo määrittelemään relationaalisena ja yhtälöitä osataan ratkaista ja arvioida myös silloin, kun operaatioita on molemmin puolin yhtälöä, kuten yhtälöissä $a + b = c + d$ ja

$a + b - c = d + e$. (Rittle-Johnson et al., 2011)

Ylin eli suhteellinen relationaalinen taso on sellainen, jossa yhtälöitä kyetään tutkijoiden Rittle-Johnson et al. (2011) mukaan ratkaisemaan ja arvioimaan vertaamalla yhtäsuuruusmerkin molemmin puolin olevia lausekkeita. Tällä tasolla yhtäsuuruusmerkin relationaalinen määritelmä myös nähdään parhaana määritelmänä ja ymmärretään, että samojen operaatioiden suorittaminen kummallekin puolelle yhtälöä säilyttää yhtäsuuruuden. Yhtälöt ovat muotoa, jossa molemmin puolin yhtälöä on operaatioita ja läsnä voi olla useampia tuntemattomia. (Rittle-Johnson et al., 2011) Esimerkiksi muotoa $ax + b = cy + d$ oleva yhtälö voisi olla sellainen, jossa yhtäsuuruusmerkki tulisi ymmärtää suhteellisella relationaalisella tasolla.

2.2 Sosiokonstruktivistinen oppimiskäsitys

Kun oppimista tutkitaan monipuolisesti, saadaan selville, miten ihminen oppii uutta tietoa. Tynjälän (1999) mukaan pitkään, 1600-luvulta lähtien, vallalla oli kuitenkin behavioristinen oppimiskäsitys, jossa oppija nähtiin tyhjänä tauluna ja oppiminen sekä opetus vain tiedon siirtämisenä. Tätä behavioristista oppimiskäsitystä vastaan alettiin kuitenkin kehittää kognitiivisia suuntauksia, joissa myös oppijalla on osuus tiedon rakentamisessa. Tämän kehityksen pohjalta syntyi myös tällä hetkellä vallalla oleva sosiokonstruktivistinen oppimiskäsitys. Konstruktivistinen oppimiskäsitys sisältää Tynjälän (1999) mukaan useita eri suuntauksia, joille on yhteistä käsitys siitä, että oppija luo uutta tietoa aktiivisena toimijana ja havainnoi sekä tulkitsee tuota tietoa omien kokemustensa ja aikaisempien tietojensa pohjalta. Oppija siis muodostaa omat merkityksensä asioista, joita opettaja opettaa. Tynjälä esittelee konstruktivismin jakautuvan karkeasti kahteen pääsuuntaukseen: yksilökonstruktivismiin ja sosiaaliseen konstruktivismiin, jotka jakautuvat edelleen alasuuntauksiin. Ensimmäisen pääpaino on yksilön tavassa muodostaa tietoa sekä tämän tiedon muodostumisen kuvaamisessa. Jälkimmäinen puolestaan painottaa oppimisen sosiaalista puolta vuorovaikutuksen ja yhteistoiminnallisuuden keinoin. Sosiaalinen konstruktivismi sisältää Tynjälän mukaan seuraavat haarat: sosiokulttuuriset lähestymistavat, symbolinen interaktionismi sekä sosiaalisen konstruktionismi. (Tynjälä, 1999)

Sosiokulttuuriset lähestymistavat ja lähikehityksen vyöhyke

Sosiokulttuuriset lähestymistavat korostavat Tynjälän (1999) mukaan oppimisen tapahtumaa sosiaalisena ilmiönä. Oppimista ei tämän näkemyksen mukaan voida tarkastella irrallisena tapahtumana, vaan se sisältää aina sosiaalisen, kulttuurisen ja historiallisen kontekstin. Suuntauksen keskeinen kehittäjä on ollut Leo Vygotsky, jonka mukaan ihminen kehittää sosiaaliseen kanssakäymiseen psykologisia apuvälineitä, joiden kautta tämä sisäistää uutta tietoa. Vygotsky korostaa kulttuuriympäristön käyttämiä merkkijärjestelmiä, kuten puhe ja kirjoitettu kieli sekä taide ja matematiikka. Hänen mukaansa oppimisessa on kyse näiden kulttuuristen välineiden omaksumisesta sosiaalisessa vuorovaikutuksessa muiden ihmisten kanssa. Lapsella on Vygotskyn mukaan aktuaalinen kehitystaso, jolla hän voi ratkaista tehtäviä itsenäisesti sekä potentiaalinen kehitystaso, jolla lapset voivat aikuisen tai etevämpien tovereiden tukemana ymmärtää abstrakteja käsitteitä ja selvitä tehtävistä, joita eivät yksin osaisi ratkaista. Näiden tasojen välisen etäisyyden Vygotsky on nimennyt lähikehityksen vyöhykkeeksi (*zone of proximal development*). Lähikehityksen vyöhykkeen teoriaa on Tynjälän mukaan myös kritisoitu siitä, ettei se ottaisi huomioon lapsen herkkyyskausia ja valmiutta suorittaa vaikeampia tehtäviä. Toisaalta on ehdotettu, että aikuisen tukemana lapsi ei oppisi suorittamaan tehtäviä ilman apua. Tynjälä kuitenkin esittää, että useimmiten teoriaa on onnistuttu soveltamaan onnistuneesti. (Tynjälä, 1999)

Symbolinen interaktionismi ja sosiaalinen konstruktionismi

Sosiaalinen konstruktionismi on Tynjälän (1999) mukaan konstruktivismin suuntauksista sosiologisin. Se pitää sisällään useita eri suuntauksia, jotka painottavat hiukan eri asioita. Tiedonmuodostuksen keskiöön on nostettu yhteisö ja yksilö on vain toissijainen tekijä. Tämän suuntauksen mukaan todellisuus muotoutuu vain, kun läsnä on vähintään kaksi henkilöä, ja merkitys riippuu kontekstista. Symbolisen interaktionismin Tynjälä puolestaan kuvaa pyrkivän ottamaan huomioon sosiokulttuuristen lähestymistapojen tavoin oppimisen sosiaalisen puolen normeineen ja käytänteineen. Kuitenkin samanaikaisesti tässä lähestymistavassa pyritään näkemään myös yksilön asioille rakentamat ainutlaatuiset merkitykset. Suuntaus sisältää siis piirteitä niin sosiaalisen konstruktivismin kuin yksilökonstruktivismista. Symbolisen interaktionismin mukaan asioiden merkitykset syntyvät sosiaalisen kanssakäymisen kautta ja oppija peilaa itseään ja ajatuksiaan yhteisön kautta. Yksilö myös nähdään aktiivisena toimijana, jolle annetaan enemmän päätäntävaltaa kuin sosiokulttuurisessa lähestymistavassa. Tynjälä mainitsee, että oppilaat voivat vastustella, kun heiltä vaaditaan oppitunneilla suurempaa aktiivisuutta sen sijaan, että käytettäisiin perinteisiä työtapoja, joissa opettaja opettaa ja oppilaat kuuntelevat. Totutun passiivisen tiedon vastaanottajan roolin vaihtaminen uuteen sekä sopeutuminen uudenlaiseen oppimiskulttuuriin vievät aikaa, mutta Tynjälän mukaan uudet tavat koetaan usein lopulta mielekkäämmiksi. (Tynjälä, 1999)

Sosiokonstruktivismi pedagogiikassa

Tärkein kysymys lienee se, miten oppimiskäsitys vaikuttaa opetukseen. Eri opettajat painottavat opetuksessaan eri asioita, mutta opetuksen lähtökohtana tulisi olla opettaa oppilaita oppimaan ja kasvamaan ihmisyyteen sekä toteuttaa tätä opetussuunnitelman antamissa raameissa. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet (2014b) esittelevät oppimiskäsitystä melko laajasti. Sen mukaan oppiminen nähdään myös erottamattomana osana yksilön kasvua itsekseen vuorovaikutuksessa muiden kanssa. Oppija nähdään aktiivisena toimijana, joka niin itsenäisesti kuin muiden kanssa oppii asettamaan omalle työlleen tavoitteita. Keskiöön on nostettu myös oppimaan oppiminen sekä itseohjautuvuus. Peruskoulun opetussuunnitelman perusteiden mukaan oppilaan luottamus omiin mahdollisuuksiinsa vahvistuu oppimistilanteessa tapahtuvan rohkaisun kautta. (Opetushallitus, 2014b)

Oppimisessa on havaittu oppijan aktiivisuuden merkitys ja opettajan rooli on Tynjälän (1999) mukaan ohjata oppijan omaa tiedon muodostumisprosessia. Merkityksellistä on luoda oppimistilanne tätä oppimisprosessia tukevaksi, jolloin uusi tieto muodostuu jo opitun tiedon päälle ja sitä tulkitaan aiempien tietojen pohjalta. Tämän vuoksi opettajan tulisi tiedostaa ja nostaa esiin oppilaidensa aikaisempia tietoja, käsityksiä ja uskomuksia opiskeltavasta asiasta ja nostaa nämä tiedot opetuksen lähtökohdaksi. Tynjälän mukaan tämä lähestymistapa auttaa myös opettajaa ymmärtämään paremmin oppilaidensa ajattelua. Sosiaalisen konstruktivismin mukaan oppiminen on sidoksissa kontekstiin, minkä takia opittava asia tulisi kytkeä monenlaisiin asiayhteyksiin. Oppimisprosessi vahvistuu, kun uusi tieto kytketään laajempiin kokonaisuuksiin ja todellisiin tilanteisiin sekä arkielämän ongelmiin. Myös oppilaiden kyky käyttää opittuja tietoja erilaisissa tilanteissa vahvistuu, kun asioita käsitellään erilaisista näkökulmista ja havainnollistetaan monipuolisten esitystapojen kautta. (Tynjälä, 1999)

2.3 Minäkäsityksen vaikutus oppimiseen

Peruskoulun opetussuunnitelman perusteiden (2014b) mukaan peruskoululla on paitsi opetuksellinen, myös kasvatuksellinen tehtävä, jonka yhtenä tavoitteena on vahvistaa oppilaan minäkuvaa ja pystyvyyden tunnetta sekä käsitystä itsestään oppijana. Tämä mainitaan erikseen myös matematiikan oppiaineen tehtävissä. (Opetushallitus, 2014b) Linnanmäki (1997) määrittelee minäkäsityksen olevan yksilön kokonaisvaltainen käsitys itsestään ja se sisältää muun muassa ulkonäön, taustan, asenteet, tunteet ja kyvyt. Minäkäsitys muodostuu vuorovaikutuksessa yksilön ja hänen ympäristönsä välillä, joten muiden henkilöiden suhtautuminen vaikuttaa yksilön minäkuvaan niin vahvistavasti kuin heikentävästi. Alakoulun alussa lapsen minäkuva on yleensä melko myönteinen, mutta se heikentyy monesti ensimmäisinä kouluvuosina. Opiskeluissa menestymiselle myönteinen akateeminen kouluminäkuva eli käsitys itsestä oppijana on Linnanmäen mukaan olennainen ja erityisen vahva silloin, kun yksilö menestyy arvostetuimmissa teoria-aineissa, kuten matematiikassa, lukemisessa ja kirjoittamisessa. Hänen mukaansa heikkojen oppilaiden minäkäsitys myös poikkeaa huomattavasti keskitasosta. Tutkijan mukaan kaikkien oppilaiden, mutta erityisesti heikosti menestyvien, olisi tärkeää saada onnistumisen kokemuksia sekä myönteistä palautetta niin vertaisiltaan kuin opettajilta. (Linnanmäki, 1997)

2.4 Matematiikan oppiminen

Matematiikan oppimiseen vaikuttavat vallalla olevan oppimiskäsityksen lisäksi matemaattisen tiedon luonne sekä oppilaan ja opettajan uskomukset matematiikasta. Seuraavaksi esittelen tarkemmin näitä oppimiseen vaikuttavia tekijöitä.

2.4.1 Konseptuaalinen ja proseduraalinen tieto

Matemaattista tiedon omaksumiseen liittyen on merkityksellistä tutkia, mitä tieto on matematiikan näkökulmasta. Hiebert & Lefevre (1986) ovat tutkineet matemaattisen tiedon duaalisuutta eli kahtiajakoa proseduraaliseen ja konseptuaaliseen tietoon. Tutkijat jakavat proseduraalisen tiedon edelleen kahteen osaan. Ensimmäiseen osaan kuuluu matematiikan formaali kieli sisältäen muun muassa numerot ja symbolit. Toiseen osaan kuuluvat matemaattisten tehtävien suorittamiseen tarvittavat säännöt ja algoritmit. Konseptuaalisen tiedon tutkijat kuvaavat puolestaan tietoverkkona, jossa asioiden väliset yhteydet muodostavat monisäikeisen verkoston. Uusi tieto opitaan luomalla asiayhteyksiä jo opittuun tietoon. Kaikkeen tietoon tämä jako ei kuitenkaan toimi, sillä osa tiedosta sisältää piirteitä kummastakin määritelmästä. Tutkijat ehdottavat, että tämän erottelun kautta saamme keinon tulkita matematiikan oppimisprosessia ja oppilaiden onnistumista siinä. (Hiebert & Lefevre, 1986)

Näveri (2009) ehdottaa, että pysyvää ja ymmärtävää oppimista voi tapahtua vain, jos proseduraalinen ja konseptuaalinen tieto kulkevat käsi kädessä toinen toisensa muodostumista tukien. Hän myös kirjoittaa, että proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon oppimisjärjestystä painotetaan eri tavoin. (Näveri, 2009) Haapasalo & Kadijevich (2000) avaavat artikkelissaan matematiikan opiskelua proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon valossa. Tutkijat jakavat näkökulmat kehitykselliseen ja opetukselliseen ja selventävät näitä purjedusesimerkkien kautta. Heidän mukaansa kehityksellinen näkökulma on seuraavanlainen: proseduraalinen tieto ja sen käyttäminen mahdollistavat konseptuaalisen tiedon kehittymisen. Purjehduksessa tämä tarkoittaisi sitä, että olisi parempi lähteä suoraan harjoittelemaan purjehtimista ja suotuisissa oloissa opetella veneen hallintaa sekä muodostaa tietoa muun muassa tuulista. Opetuksellinen näkökulma puolestaan on tutkijoiden mukaan seuraavanlainen: proseduraalinen tieto täytyy rakentaa ennen kuin sitä voi käyttää. Opiskellaan ensin purjehtimisen teoriaa ja tuulten käyttäytymistä ja vasta sitten testataan teoriaa käytännössä. (Haapasalo & Kadijevich, 2000)

Yhtälöiden tapauksessa konseptuaalisen tiedon voisi määritellä olevan esimerkiksi yhtäsuuruuden, muuttujan ja tuntemattoman käsitteiden sekä negatiivisten lukujen ymmärtämistä. Lisäksi oppilaan voisi olettaa osaavan yhdistellä näitä käsitteitä toisiinsa ja hahmottavan esimerkiksi yhteyden yhtäsuuruuden ja yhtälön välillä. Proseduraalinen tieto puolestaan voisi olla yhtälöiden tapauksessa esimerkiksi yhtälönratkaisutaitojen hallitsemista ja oikeiden merkintätapojen käyttämistä, eli symbolisen kielen hallitsemista.

2.4.2 Matematiikan kolme maailmaa

David Tall (2004) on tutkinut matemaattisen ajattelun kehittymistä ja jakanut matemaattisen tiedon kolmeen kategoriaan, joita hän kutsuu matematiikan kolmeksi maailmaksi. Hannula (2014) on suomentanut nämä kolme maailmaa seuraavasti:

1. käsitteellis-ruumiillinen eli ilmenevä maailma (*conceptual-embodied*),
2. proseptuaalis-symbolinen maailma (*proceptual-symbolic*) ja
3. aksioomaattis-formaali maailma (*axiomatic-formal*).

Ensimmäinen kolmesta maailmasta eli käsitteellis-ruumiillinen maailma sekä sen matemaattinen tieto muodostuvat ajatuksista ja havainnoista, joita teemme ympäröivästä maailmasta. Tähän sisältyvät myös mielemme sisäiset konseptit, kuten esimerkiksi avaruudellinen hahmottaminen. Matemaattisen tiedon hahmottaminen tapahtuu reflektoinnin ja sivistyneen kielen kautta. (Tall, 2004) Käsitteellis-ruumiillisessa maailmassa yhtälöt voisivat näyttäytyä esimerkiksi objekteina ja esineinä, joiden välistä yhtäsuuruutta voi tutkia, tai yhtälöiden graafisina esityksinä, joiden käyttäytymistä voi hahmotella GeoGebra-ohjelmiston avulla.

Toinen eli proseptuaalis-symbolinen maailma koostuu symboleista, joita käytämme laskemiseen. Matematiikan toiseen maailmaan kuuluvat myös siirtymät proseduraalisen tiedon eli käytännön laskemisen ja konseptuaalisen tiedon eli käsitteiden välillä. Toiseen maailmaan liittyy myös käsite prosepti, joka on prosessin ja konseptin yhteenliittymä (Gray & Tall, 1994; Tall, 2004). Gray & Tall (1994) avaavat määrittelemäänsä termiä lisäksi kuvailemalla sitä seokseksi, jossa on kolme osaa. Nämä osat ovat prosessi, matemaattinen objekti ja symboli, joista prosessi tuottaa matemaattisen symbolin ja symbpli puolestaan kuvaa joko prosessia tai objektia. Proseptuaalinen ajattelu on tutkijoiden mukaan kykyä käyttää eri symbolisia esityksiä samalle asialle ja toisaalta myös symbolien joustavaa tulkintaa prosessin ja konseptin välillä. Ilmiössä siis yhdistyvät ymmärtäminen ja sen konsepti sekä tekeminen ja sen prosessi. (Gray & Tall, 1994) Yhtälöiden näkökulmasta proseptuaalis-symboliseen maailmaan voisi siis lukea kuuluvan numero- kirjain- ja laskutoimitussymbolien lisäksi myös yhtälöiden laskusääntöjen ymmärtämisen ja näiden käytön hallitsemisen.

Kolmas eli aksiomaattis-formaali maailma muodostuu matematiikan aksioomista ja määritelmistä sekä niiden ominaisuuksista (Tall, 2004). Tämä kolmas maailma pohjautuu joukko-oppiin sekä formaaleihin matemaattisiin todistuksiin (Tall, 2013). Formaali maailma vaatii korkeamman tason matemaattista ajattelua kuin käsitteellinen ja symbolinen maailma (Tall, 2004). Yhtälöiden tapauksessa aksiomaattis-formaaliin maailmaan voisi ajatella kuuluvan niin yhtäsuuruuden ja yhtälöiden määritelmät kuin yhteen- ja kertolaskujen laskulait, kuten vaihdannaisuus ja liitännäisyys, sekä osittelulait, joita myös yhtälönratkaisussa tarvitaan. Vaikka yhtäsuuruuden ja laskutoimitusten ominaisuudet tulevat yläkoululaisille prosesseina esiin, eivät niiden formaalit todistukset kuulu yläkoulun eivätkä varsinkaan alakoulun oppimateriaaliin. Yläkoulun matematiikan voisikin sanoa jäävän proseptuaalis-symboliseen maailmaan ja itse asiassa vasta yliopistomatematiikka sukeltaa kunnolla aksiomaattis-formaaliin maailmaan.

Matematiikan kolmen maailman: käsitteellisen, symbolisen ja formaalin maailman välillä tapahtuva liikkuminen on Tallin (2004) mukaan erilaista eri ihmisillä. Osa lapsista voi jäädä jumiin laskuprosesseihin sen sijaan, että he osaisivat muodostaa niistä käsitteitä. Tämä voi johtaa ulkoa opettelun kierteeseen. Siirtyminen matematiikan kolmen maailman välillä vaatii myös uudenlaista ajattelua ja sisältää esteitä, jotka tuottavat toisille enemmän ongelmia kuin toisille. Yksilölliset ratkaisut esteiden ylittämiseen voivat johtaa vaihtoehtoisten käsitysten muodostumiseen. Tall käyttää entuudestaan tutusta havainnosta termiä 'met-before'. Näiden ja uuden tiedon välillä oppija voi kokea muutosvastarintaa. (Tall, 2004)

Algebran esimerkkinä Tall (2004) esittelee yhteenlaskun. Hänen mukaansa 'met-before' voi olla sellainen, että jokaisella yhteenlaskulla on tulos, joka on yhteenlaskettavien summa, esimerkiksi $2 + 3 = 5$. Kuitenkaan summalle $2x + 3$ ei voida antaa vastausta, ellei muuttujan x arvoa tunneta. Tämä uusi yhteenlasku näyttää lapselle mahdottomalta, sillä entuudestaan tuttua yhteenlaskua ei voi nyt suorittaa. Toinen 'met-before' on esimerkiksi lukujen paikka-arvojen näkeminen absoluuttisina, eli jos esimerkiksi $x = 3$, niin $2x = 23$. Toisaalta 'met-before' voi myös liittyä kirjainlaskentaan siten, että kirjaimet nähdään salakielenä, esimerkiksi $a = 1, b = 2, \ldots$, jolloin lausekkeen $30 - x$ vastaukseksi saadaan 6, sillä $x = 24$. Tall ehdottaakin, että 'met-beforet' ovat matematiikan oppimiselle suuri kognitiivinen haaste, sillä lapsi turvautuu herkästi ennalta tuttuihin tekniikoihin. (Tall, 2004)

2.4.3 Käsitykset matematiikasta

Tällä hetkellä vallalla olevan sosiokonstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaan oppiminen tapahtuu sosiaalisessa vuorovaikutuksessa muiden kanssa ja siihen vaikuttavat oppijan omat havainnot ja kokemukset. Jos lapsi uskoo jonkin asian todeksi, häntä voi tutkijoiden Carpenter et al. (2003) mukaan olla vaikea saada muuttamaan mieltään. Lapsilla on myös tapana vahvistaa omia käsityksiään perustelemalla niitä esimerkein, joiden he ajattelevat olevan riittäviä yleistyksiä. Heidän matemaattinen ajattelunsa ja kykynsä muodostaa perusteluja ovat kuitenkin melko rajalliset. (Carpenter et al., 2003) Ei voi kuitenkaan unohtaa opetuksen merkitystä oppimiselle. "Opettaja opettaa niin kuin häntä on opetettu", kirjoittaa Hihnala (2005). Opettajan asenteet ja omat uskomukset voivat herkästi siirtyä oppilaille (Hihnala, 2005), minkä vuoksi on tärkeää tarkastella myös opettajien käsityksiä matematiikasta.

Alba Gonzalez Thompson (1984) on tutkinut yläkoulun matematiikan opettajien käsitysten, uskomusten ja näkemysten vaikutusta heidän opetukseensa. Hän nostaa tutkimuksensa tapausesimerkeiksi kolme hyvin erilaista opettajaa. Näillä opettajilla oli hyvin erilaiset näkemykset matematiikan merkityksestä ja se vaikutti niin heidän tapaansa opettaa kuin heidän tapaansa valmistella tunteja. Yksi opettajista ei juuri valmistellut tuntejaan ja hänen tunneillaan keskustelu saattoi herkästi kääntyä asian viereen. Toinen opettaja valmisteli huolellisesti tunnit, mutta ei kyennyt oppitunnilla joustamaan suunnitelmastaan. Kolmas opettaja suunnitteli tunteja ja pyrki huomioimaan niin ennen tuntia kuin sen aikana oppilaiden mahdollisia ongelmia ymmärryksessä. Opettajan uskomuksilla ja niiden vaikutuksella hänen opetukseensa on monimutkainen yhteys, johon vaikuttaa Gonzalez Thompsonin mukaan muun muassa se, millaista opetuksen tulisi opettajan mielestä ylipäätään olla. Tutkija ehdottaa varovaisesti, että opettajan uskomukset ja näkemykset matematiikan opetuksesta vaikuttavat tämän tapaan opettaa. (Gonzalez Thompson, 1984)

2.4.4 Matematiikan oppimisvaikeudet

Aiemmin tässä luvussa olen käsitellyt oppimiseen vaikuttavia asioita, kuten vallalla olevaa oppimiskäsitystä ja opettajan ja oppijan roolia. Oppimisvaikeuksia ilmenee silti, vaikka opettajat yrittävät parhaansa ja koettavat innostaa oppilaitaan oppimaan. Mutta mikä on ero satunnaisella virheellä ja virhekäsityksellä? Entä, mitä tarkoittaa dyskalkulia? Esittelen seuraavaksi lyhyesti nämä termit.

Virhekäsitykset ja miniteoriat

Jokainen tekee matematiikassa laskuvirheitä, mutta laskuvirheitä on hyvin erilaisia ja eritasoisia. On satunnaisia virheitä, jotka saattavat johtua esimerkiksi hetkellisestä keskittymisen herpaantumisesta ja sitten on hyvin perustavanlaatuisia heikkoon ymmärrykseen pohjautuvia virhekäsityksiä (Ryan & Williams, 2007) tai vaihtoehtoisia käsityksiä (Claxton, 2002). Byrd, McNeil, Chesney & Matthews (2015) määrittelevät virhekäsityksen olevan oppijan kapeakatseinen yleistys, joka voi estää oppimista. Tutkijat nostavat esiin virhekäsitykset yhtäsuuruudesta, jotka voivat vaikuttaa negatiivisesti muun muassa algebran konseptien sekä matemaattisen ekvivalenttiuden oppimiseen. (Byrd, McNeil, Chesney, & Matthews, 2015)

Virhekäsityksistä voi muodostua Claxtonin (2002) mukaan osittaisia teorioita, jotka hän nimeää miniteorioiksi. Hänen mukaansa miniteoriat voivat toimia jossakin tietyssä tilanteessa, mutta ne eivät ole yleistettävissä laajemmaksi kokonaisuudeksi. Oppilaat kehittävät miniteorioita, kun omat ratkaisukeinot eivät riitä (Claxton, 2002), tai kun virhekäsitykset eivät muutu opetuksen aikana ja oppija alkaa selittää asioita omalla tavallaan (Hakkarainen, Lipponen, & Lonka, 2004). Oppilas tarvitsee jonkinlaisen vaihtoehtoisen vastausmallin (Claxton, 2002; Hakkarainen et al., 2004) jolloin tieto voi koostua hyvinkin irrallisista palasista (Hakkarainen et al., 2004).

Dyskalkulia

Virhekäsitysten ja miniteorioiden kehittyminen ovat haastavia, mutta myös ratkaistavissa ja ehkäistävissä. Oma lukunsa ovat matematiikan oppimisvaikeudet, jotka STAKESin tautiluokituksen mukaan ovat peruslaskutaitoon liittyvien matemaattisten taitojen heikkoutta, josta käytetään termiä laskemiskyvyn häiriö eli dyskalkulia. Dyskalkulian tautiluokituksen piiriin eivät kuulu muiden kognitiivisten tai neurologisten häiriöiden avulla selittyvät matematiikkavaikeudet. (Nienstedt, 1995) Syitä matemattiikavaikeuksille voi olla lukuisia, esimerkiksi taustalla olevat neuropsykologiset, psyykkiset, emotionaaliset ja sosiaaliset sekä opetuksesta johtuvat syyt (Dräger, 2015).

Räsäsen (2012) mukaan matematiikkavaikeuksia on jopa 5–7 prosentilla ikäluokasta. Dräger (2015) ehdottaa osuudeksi 6–8 % tai jopa 15 %. Matematiikkavaikeuksien eräs mahdollinen aiheuttaja voi olla matematiikan perusasioiden ymmärtämisen vaikeudet (Dräger, 2015), mitä Räsäsen mukaan voi selittää matematiikan kumulatiivisella luonteella, eli uuden tiedon rakentumisella jo opitun päälle. Erot myös kasvavat nopeasti suuriksi, sillä uusia matematiikan sisältöjä tulee omaksuttavaksi lähes joka oppitunnilla (Räsänen, 2012).

Drägerin (2015) mukaan vahvan matemaattisten taitojen perustan rakentuminen alkaa jo varhaiskasvatuksen esimatemaattisten taitojen harjoittelusta, joita ovat esimerkiksi luokittelu ja vertailu sekä visuaalinen hahmottaminen. Esimatemaattisten taitojen vankka osaaminen edesauttaa hänen mukaansa matematiikan parempaa omaksumista alkuopetuksessa. (Dräger, 2015) Myös Räsänen (2012) korostaa oppimisvaikeuksien ennaltaehkäisyn merkitystä ja sen huomioimista jo varhaiskasvatuksen puolella. Hänen mukaansa matematiikkavaikeudet saatetaan tunnistaa jo aikaisin, mutta niihin ei välttämättä puututa ennen neljättä luokkaa, vaikka tukea olisi mahdollista tarjota jo huomattavasti tätä ennen. (Räsänen, 2012)

Luku 3

Aikaisempi tutkimus

Yläkoululaisten yhtälönratkaisun ongelmat juontavat juurensa jo alakoulussa opittuihin käsitteisiin sekä hyppyyn aritmeettisen laskennon parista abstraktimpaan algebralliseen ajatteluun. Suurimpia haasteita yhtälönratkaisussa tuottavat muun muassa yhtäsuuruusmerkin puutteellinen ymmärrys, negatiiviset luvut sekä tuntemattoman käsite. Kuitenkin myös opettajien ja oppilaiden käsitykset yhtälöistä ja yhtäsuuruudesta vaikuttavat oppimistuloksiin. Mitkä voisivat olla hyviä keinoja lähestyä yhtäsuuruutta ja yhtälöitä esiopetuksessa? Entä alakoulussa tai yläkoulussa? Tässä luvussa esittelen aiempaa tutkimusta aiheen parista ja luvun loppuun olen koonnut eri tutkimuksista ja oppimateriaaleista ehdotuksia yhtäsuuruuden ja yhtälöiden opetukseen.

3.1 Aritmetiikasta algebraan

Ajattelemaan oppiminen, ongelmanratkaisu ja päättelyn taidot mainitaan peruskoulun opetussuunnitelman perusteiden (2014b) laaja-alaisen osaamisen tavoitteissa perusopetuksen tärkeinä tehtävinä. Näihin tarpeisiin vastaa erityisesti matematiikan opetus, sillä oppiaineen tehtäväksi on määritelty muun muassa oppilaiden matemaattisen ajattelun ja ongelmanratkaisutaitojen kehittäminen. (Opetushallitus, 2014b) Matematiikan oppiminen on tutkijoiden Carpenter et al. (2003) mukaan myös ajattelemaan oppimista eikä matematiikka ei ole vain kokoelma irrallisia toimenpiteitä, joilla voi ratkaista laskuja, vaan osa laajempaa kokonaisuutta, jossa ongelmia voidaan ilmaista ja ratkoa symbolikielen keinoin (Carpenter et al., 2003).

Aritmetiikasta puhuttaessa tässä tutkielmassa tarkoitetaan alakoulusta tuttua laskennallista puolta ja aritmeettiset yhtälöt määritellään Filloy & Rojanon (1989) määritelmän tavoin olevan muotoa $Ax + B = C$. Aritmeettiset yhtälöt sisältävät pääasiassa luonnollisia lukuja ja ne ovat palautettavissa konkreettisiksi malleiksi. Algebraan puolestaan sisältyy abstraktimpi ulottuvuus ja tässä tutkielmassa algebrasta puhuttaessa viitataan juuri tähän abstraktimpaan ymmärrykseen. Algebralliset yhtälöt määritellään tässä tutkimuksessa myös Filloy & Rojanon (1989) mukaisesti olevan muotoa $Ax + B = Cx + D$.

Perinteisesti alakoulun matematiikka keskittyy aritmeettiseen laskentoon ja vasta yläkoulussa rinnalle tulee abstraktimpi algebrallinen ajattelu (Ko & Karadag, 2013). Tämä jako aritmetiikan ja algebran välillä on tutkijoiden Carpenter et al. (2003) mukaan haitallinen, jos alakoulussa ei opeteta riittävästi matemaattista ajattelua, jota algebrassa tarvitaan. Aritmetiikka nähdään tutkijoiden mukaan herkästi vain laskujen sarjana, eivätkä oppilaat ymmärrä yhteyttä yhtälönratkaisun ja aritmeettisten laskujen välillä. Algebrallisessa päättelyssä tarvittavia taitoja pitäisi tutkijoiden mukaan opettaa jo varhaisilla alaluokilla, jotta taidot ehtisivät kehittyä riittävästi yläkouluun siirryttäessä. (Carpenter et al., 2003)

Siirtymä aritmetiikasta algebraan on erityisen merkityksellinen (Ko & Karadag, 2013) ja se nähdään usein kognitiivisena kuiluna (Herscovics & Linchevski, 1994; Bednarz, Radford, Janvier, & Lepage, 1992). Tutkijoiden Bednarz, Radford, Janvier & Lepage (1992) mukaan tämä kuilu näyttäytyy erityisesti ongelman representaatiossa eli mallissa. Aritmeettinen päättely alkaa tutkijoiden mukaan ongelmasta ja sen representaatiosta. Suoritettavat perättäiset laskutoimitukset tehdään usein päättelemällä ja malliin liittäen. Algebrallisessa päättelyssä puolestaan lähdetään liikkeelle tuntemattomasta, jonka arvo pyritään selvittämään. Tämän jälkeen täytyy kuitenkin olla valmis irrottautumaan sekä ongelmasta että mallista, jotta ratkaisu voidaan löytää. (Bednarz et al., 1992)

Herscovics & Linchevski (1994) selvittivät erään kanadalaisen seitsemännen luokan oppilaiden yhtälönratkaisumenetelmiä. Näille oppilaille ei ollut opetettu systemaattisia algebrallisia menetelmiä yhtälönratkaisuun. Tutkijat kiinnittivät erityistä huomiota yhtälöiden valintaan, jotta he voisivat varmistaa, että mahdolliset ongelmat eivät liittyisi aritmetiikkaan vaan algebraan. Aritmeettisten yhtälöiden kohdalla yleisimmin käytetyt ratkaisumenetelmät olivat tutkijoiden mukaan laskutoimituksen laskeminen vaihtoehtoisella tekijällä sekä vasta- tai käänteisoperaation käyttö. Käytännössä näitä tekniikoita käytti 68–87 % oppilaista. Vaihtoehtoisen tekijän menetelmää käytettiin eniten muun muassa yhtälössä $364 = 796 - n$, joka ratkaistiin siis laskemalla suoraan erotus $796 - 364 = 432$. Sen sijaan yhtälön $35 = n + 16$ tapauksessa oli käytetty eniten vastaoperaatio-menetelmää, jossa ratkaistiin erotus $35 - 16 = 19$. Tutkijat huomasivat, että oppilaat osasivat ratkoa myös monimutkaisempia algebrallisia yhtälöitä, vaikkei heille näitä ollut opetettu. Oppilaat kuitenkin yrittivät käyttää samoja ratkaisumenetelmiä kuin helpompien aritmeettisten yhtälöiden tapauksessa. Algebrallisissa yhtälöissä, kuten $7n - n = 108$ käytettiin yleisimmin korvaamismenetelmää, eli käytännössä kokeiltiin, mikä luku sopii tuntemattoman paikalle. Tätä menetelmää käytti suurin osa eli peräti 87–100 % oppilaista. Vain kolme oppilasta ymmärsi parin yhtälön kohdalla yhdistää muuttujan sisältävät termit ja selvittää vastauksen tällä tavoin, mutta ei silloin, jos tuntematon n esiintyi ilman kerrointa. Tutkijat rajaavatkin aritmetiikan ja algebran välisen kognitiivisen kuilun kykyyn tai kykenemättömyyteen operoida muuttujaa tai muuttujalla. (Herscovics & Linchevski, 1994)

3.2 Yhtälönratkaisu

Yhtälöt ovat tärkeä apuväline ongelmanratkaisutehtävissä ja arkipäivän ongelmissa, kuten prosenttilaskuissa ja puhelinlaskun muodostumisessa (Attorps, 2006). Arkipäiväinen ongelma voi olla vaikka seuraavanlainen: ”Kuinka kauan minun tulee tehdä töitä, jotta voin ostaa 1200 € maksavan pyörän, kun nettotuloni ovat 500 € kuukaudessa?” Arkipäivän ongelmia ei yleensä tarvitse muuttaa yhtälöiksi, vaan ne ratkeavat usein muutaman päättelyvaiheen tai lyhyen laskutoimituksen kautta. Kaikenlaisten ongelmanratkaisutehtävien ratkaisemiseen tarvitaan kuitenkin kykyä hahmottaa kyseessä oleva ongelma ja muotoilla se laskuiksi ja nämä taidot kehittyvät yhtälönratkaisun harjoittelun sivutuotteena.

Yhtälöitä ei käytetä vain matematiikassa, vaan niiden sovelluksia löytyy myös luonnontieteistä. Fysiikan ja kemian osalta peruskoulun opetussuunnitelman perusteiden (2014b) keskeiset sisällöt ja opetuksen tavoitteet sisältävät kuitenkin vain yhden maininnan yhtälöistä. Tämä löytyy kemian keskeisten sisältöjen kohdalta, jossa mainitaan reaktioyhtälöiden tulkitsemisen harjoitteleminen. (Opetushallitus, 2014b) Kemian opinnot sisältävät erityisesti lukiossa lukuisia kaavoja, mutta fysiikassa näitä tulee jo yläkoulussa. Esimerkiksi nopeus v saadaan selvitettyä jakamalla matka s matkaan kuluneella ajalla t, jolloin saadaan nopeudelle kaava $nopeus = \frac{matka}{matkaan\, kulunut\, aika}$ tai lyhyemmin $v = \frac{s}{t}$. Nämä kaavat ovat kaikki yhtälöitä ja sisältävät myös kirjaimia ja tuntemattoman käsitteen, joten vaikeudet saattavat tulla esiin myös fysiikan ja kemian tunneilla.

Algebrallisen ajattelun ja yhtälöiden tärkeys näkyy selvästi myös mahdollisissa jatko-opinnoissa. Puutteelliset tai virhekäsitykseen perustuvat taidot yhtälönratkaisussa voivat vaikeuttaa opiskelua, kun lukiossa yksinkertaisista yhtälöistä siirrytään monimutkaisempiin tapauksiin ja käsittelemään useampia tuntemattomia. Myös monissa ammateissa tarvitaan yhtälöitä. Maalarin täytyy selvittää maalin riittoisuutta ja sairaanhoitajan oikeaa lääkkeiden annostelua. Fyysikko ratkoo myös monenlaisia monimutkaisia yhtälöitä, esimerkiksi differentiaaliyhtälöitä. Opetussuunnitelmien perusteiden sisältöä tutkitaan tarkemmin tutkielman luvussa 4. Seuraavaksi tarkastellaan kuitenkin lähemmin haasteita, joita yhtälönratkaisussa kohdataan.

Yhtälönratkaisun haasteista

Erityisesti Yhdysvalloissa on tutkittu paljon ala- ja yläkoululaisten käsityksiä yhtälöistä sekä heidän yhtälönratkaisutaitojaan (Booth et al., 2014; Carpenter et al., 2003; Falkner et al., 1999). Kun aritmetiikasta siirrytään algebraan, kohdataan uusia abstrakteja ajattelumalleja, jotka johtavat monenlaisiin haasteisiin yhtälönratkaisussa. Nämä haasteet puolestaan johtavat tutkijoiden Booth et al. (2014) mukaan herkästi virhekäsityksiin, jotka voivat olla hyvinkin itsepintaisia. Yhtälönratkaisussa virhekäsityksiä esiintyy muun muassa seuraavien käsitteiden kohdalla: muuttujat (*variables*), miinusmerkki (*negative sign*), yhtäsuuruus/erisuuruus (*equality/inequality*), laskutoimitukset (*operations*), murtoluvut (*fractions*) ja matemaattiset ominaisuudet (*mathematical properties*). Joskus myös yhden tehtävän ratkaisu voi sisältää useamman virheen tai virhekäsityksen. (Booth et al., 2014)

Tutkijat Booth et al. (2014) selvittivät yhdysvaltalaisten yläkoululaisten yhtälönratkaisutaitoja ja sitä, mitkä virhekäsitykset olivat yleisimpiä, mitkä haitallisimpia ja mitkä itsepintaisimpia. Kaikkein yleisimmiksi virheiksi osoittautuivat miinusmerkkiin liittyvät virheet. Muutamassa tehtävätyypissä, niiden frekvenssi oli muihin virheisiin nähden jopa lähes kolminkertainen. Tutkijat eivät kuitenkaan pitäneet tätä kovin huolestuttavana, sillä virheitä tehtiin eniten kouluvuoden alussa ja keskivaiheilla, muttei enää niin paljon kouluvuoden lopussa. Haitallisimmiksi ja itsepintaisimmiksi virheiksi tutkijat Booth et al. (2014) luokittelivat sellaiset virheet, joita tehtiin paljon ja jotka ennustivat heikkoa menestystä kouluvuoden päättötesteissä. Näitä olivat lukuvuoden alussa tehdyt muuttujaan liittyvät virheet, lukuvuoden alussa ja keskellä tehdyt matemaattisiin ominaisuuksiin ja vääriin operaatioihin liittyvät virheet, lukuvuoden keskellä ja lopussa tehdyt yhtäsuuruuteen liittyvät virheet sekä lukuvuoden lopussa tehdyt miinusmerkkiin liittyvät virheet. Yhtäsuuruuden käsite ymmärrettiin tutkijoiden mukaan heikosti, mutta erityisen huolestuttavaa heidän mielestään oli yhtäsuuruusmerkkiin liittyvien virheiden lisääntyminen kouluvuoden edetessä. Tutkijat päättelevät, että yhtäsuuruusmerkin relationaalisuuden ymmärtäminen korostuu haastavampien yhtälöiden kohdalla eikä pelkkä operationaalinen ymmärrys yhtäsuuruudesta riitä. Tutkijat kehottavat käyttämään oppituntiaikaa erityisesti yhtäsuuruuden käsitteen ymmärtämisen vahvistamiseen. (Booth et al., 2014)

Tutkimuksessaan McNeil & Alibali (2005b) selvittivät alakoululaisten ja fysiikan yliopisto-opiskelijoiden aritmeettisten operaatioiden tuntemuksen vaikutusta heidän yhtälönratkaisukykyynsä. Tutkimuksessa fysiikan opiskelijoiden interventioryhmä teki aktivoivia tehtäviä, jotka ohjasivat yhtäsuuruusmerkin operationaaliseen käyttöön. Kontrolliryhmälle näitä aktivoivia tehtäviä ei puolestaan tarjottu. Tutkijat huomasivat, että suuri osa interventioryhmäläisistä teki alkeellisia virheitä yhtälönratkaisussa, kun heille oli teetetty ensin tehtäviä, joissa yhtäsuuruusmerkki näyttäytyi vain operationaalisesti. Kontrolliryhmään verrattuna interventioryhmään kuuluneet käyttivät huomattavasti vähemmän oikeanlaisia operaatioita yhtälönratkaisussa. Esimerkiksi tehtävään $7 + 5 + 4 = 7 + \_\_$ laitettiin herkästi puuttuvan luvun paikalle luku 23, eli strategiana käytettiin ”laske kaikki yhteen”. Tämän strategian käyttö tuntui tutkijoiden mukaan olevan suoraa seurausta aktivoivista tehtävistä, sillä kontrolliryhmäläisistä ($n = 12$) kukaan ei tehnyt yhdessäkään tehtävässä vastaavaa virhettä, kun taas interventioryhmästä ($n = 12$) viisi teki tämän virheen vähintään kerran. Alakoululaisten tutkimusasetelma oli hieman erilainen kuin fysiikan opiskelijoille suunnattu, mutta siinäkin operationaalisten mallien tarjoaminen heikensi lasten kykyä ratkaista yhtälöongelmia lyhyen oppituokion jälkeen. Tutkijoiden mukaan aritmeettisten operaatioiden tunteminen haittaa yhtälönratkaisussa onnistumista. Tutkijat myös ehdottavat, että 1.–3.-luokkalaiset saattavat ratkaista yhtälöitä intuitiivisemmin, sillä heillä ei ole vielä niin vahvaa käsitystä aritmeettisista operaatioista (McNeil & Alibali, 2005b).

3.3 Opettajien käsityksiä yhtälöistä

Ruotsalaisten opettajien ja opettajaopiskelijoiden käsityksiä yhtälöistä ja niiden opettamisen merkityksestä ovat tutkineet Attorps (2005, 2006) sekä Attorps & Tossavainen (2007). Tutkijat Attorps & Tossavainen (2007) huomasivat, että sekä opettajien että opettajaopiskelijoiden käsitykset yhtälöistä ovat kallellaan yhtälön ominaisuuteen laskennallisena prosessina eivätkä sen ominaisuuteen kahden asian välisenä yhtäsuuruutena. Attorps (2005) jakoi tutkimuksessaan opettajien vastaukset algebran ja yhtälöiden opetuksen merkityksestä neljään kategoriaan. Kaksi ensimmäistä olivat käytännönläheisiä, kolmas kuvastaa paremmin algebran perusluonnetta ja viimeinen liittyy oppivelvollisuuteen. Oppilaiden tulisi oppia yhtälöiden käyttö 1) ongelmanratkaisun välineenä, 2) apuvälineenä jokapäiväisessä elämässä, 3) voidakseen ilmaista ajatuksiaan yleisellä tasolla ja 4) saavuttaakseen opetussuunnitelmien tavoitteet. (Attorps, 2005) Opettajien kommenteista nousi esille Attorpsin (2006) tutkimuksessa se, että yhtälöt ovat tärkeä apuväline ongelmanratkaisutehtävien ratkaisemisessa, mutta myös arkipäivän ongelmissa, kuten puhelinlaskun ja prosenttilaskujen ratkaisemisessa. Opettajien mielestä on tärkeää vahvistaa yhteyttä yhtälöiden ja todellisen elämän välillä, ettei yhtälöitä nähtäisi vain suoritettavina taikatemppuina. (Attorps, 2006)

Tutkijat Attorps & Tossavainen (2007) selvittivät lisäksi yläkouluopettajien käsityksiä yhtälön määritelmästä. Ensinnäkin opettajat määrittelivät yhtälöä konkretian kautta esimerkiksi vaa'an ja keinulaudan avulla. Toiseksi opettajat määrittelivät yhtälön prosessina, jonka avulla voi ratkaista ongelmia ja selvittää yhtälön tuntematonta. Kolmanneksi yhtälöt nähtiin yleistyksenä aritmetiikalle, sillä numeroiden sijaan käytetään kirjaimia. (Attorps & Tossavainen, 2007) Joitakin yhtälöitä ei nähdä yhtä selvästi yhtälöinä kuin toisia. Attorps (2006) huomasi, etteivät opettajaopiskelijat ole varmoja, ovatko funktiot yhtälöitä. Peräti 62 % lukioon suuntautuvista, 44 % yläkouluun ja 43 % alakouluun suuntautuvista opettajaopiskelijoista vastasi, ettei $f(x) = 2x + 1$ ole yhtälö. Enemmistö yläkouluun ja lukioon suuntautuvista opiskelijoista ei pitänyt integraalia $\int f(x)dx = x^2 + C$ yhtälönä, mutta sen sijaan luokanopettajaopiskelijoiden enemmistö piti. Pallon tilavuuden kaava $V = \frac{4\pi r^3}{3}$ jakoi mielipiteet melko tasan. Lauseketta $x^2 - 5x - 10$ piti yhtälönä 19 luokanopettajaopiskelijaa 28:sta, 14 yläkouluun suuntautuvaa opettajaopiskelijaa 34:stä ja 3 lukioon suuntautuvaa opettajaopiskelijaa 13:sta. (Attorps, 2006) Myös opettajaopiskelijoiden tulisi tutustua yhtälönratkaisun pysyvimpiin virhekäsityksiin ja oppia tunnistamaan sekä omia että oppilaidensa virheellisiä käsityksiä yhtälöistä (Attorps & Tossavainen, 2007).

3.4 Yhtäsuuruus yhtälönratkaisussa

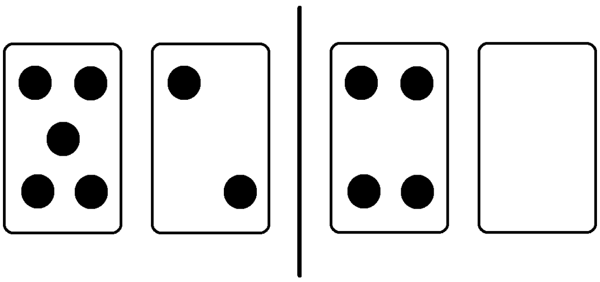
Yhtäsuuruusmerkin ymmärtämistä on tutkittu paljon ja huomattu, että kaikenikäisillä oppijoilla on haasteita sen kanssa (Falkner et al., 1999; Knuth, Stephens, McNeil, & Alibali, 2006; Sherman & Bisanz, 2009; Stephens et al., 2013). Yhtäsuuruusmerkki esiintyy ensimmäisen kerran jo varhaisessa vaiheessa alakoulun matematiikassa, mutta sen jälkeen siihen ei juuri kiinnitetä opetuksessa huomiota (Knuth et al., 2006). Opettajat tuntuvat ajattelevan, ettei jo alakoulussa opetettuun käsitteeseen tarvitse palata yläkoulussa (Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg, & Stephens, 2005), mikä voi osaltaan selittää, miksi monet oppilaat ymmärtävät yhtäsuuruusmerkin heikosti (McNeil & Alibali, 2005a).

Vajavainen ymmärrys yhtäsuuruusmerkistä on yksi suurimmista kompastuskivistä algebran oppimisessa (Carpenter et al., 2003). Yhtäsuuruusmerkin ymmärtäminen on kuitenkin korvaamaton osa algebrallisen ajattelun kehittymistä (Falkner et al., 1999) ja algebran ymmärtämistä (Ko & Karadag, 2013). Erityisen tärkeää yhtäsuuruuden käsitteen ymmärtäminen on yhtälöiden kohdalla, sillä käytännössä kaikkien yhtälönratkaisumenetelmien käyttö vaatii yhtäsuuruusmerkin ymmärtämisen relaationa (Carpenter et al., 2003). Yhtälön ratkaisemisessa lähdetään tutkijoiden Carpenter et al. (2003) mukaan liikkeelle usein vähentämällä jokin luku tai lisäämällä sen vastaluku. Tämä operaatio täytyy kuitenkin ymmärtää tehdä kummallekin puolelle, jotta yhtäsuuruus säilyy. Jos yhtäsuuruusmerkin ymmärrys on vajavainen, yhtälöä koetetaan ratkaista pelkkien aritmeettisten laskujen avulla. Algebran mahdollisuudet avautuvat, kun ymmärretään, että yhtäsuuruusmerkki on relaatio kahden yhtä suuren luvun tai lausekkeen välillä. Myös aritmetiikan oppiminen voi helpottua tämän asian ymmärryksen kautta. (Carpenter et al., 2003) Yksinkertaisissa aritmeettisissa yhtälöissä operationaalinen ymmärrys voi vielä riittää, mutta haastavammissa algebrallisissa yhtälöissä tarvitaan relationaalinen ymmärrys yhtäsuuruusmerkistä (Booth et al., 2014).

Yhtäsuuruusmerkin ymmärrys vaikuttaa oppilaiden yhtälönratkaisutaitoihin, toteavat tutkijat Knuth et al. (2006). Tutkijat huomasivat, että yhdysvaltalaiset yläkoululaiset, joilla oli vahva käsitys yhtäsuuruuden relationaalisuudesta, menestyivät yhtälönratkaisutehtävissä paremmin kuin ne, joiden käsitys oli operationaalinen. Merkityksellinen havainto oli, että oppilaat, jotka eivät olleet opiskelleet formaalia algebraa ja algebrallisia ongelmanratkaisustrategioita, ratkaisivat yhtälöitä paremmin, jos he ymmärsivät yhtäsuuruusmerkin relationaalisuuden. (Knuth et al., 2006)

Lasten ymmärrys yhtäsuuruusmerkistä voi liittyä myös symbolikieleen. Tutkijat Sherman & Bisanz (2009) selvittivät alakoulun 2.-luokkalaisten ymmärrystä ekvivalenttiudesta sekä symbolisella että havainnollisella tasolla. Tutkijat huomasivat, että lapset ymmärsivät yhtäsuuruuden ekvivalenttiuden paremmin, kun sitä ei esitetty symbolikielellä. Esitetyt ongelmat olivat samat symbolisen esitystavan testiryhmälle ja ryhmälle, jolle ongelmat esitettiin apuvälineiden avulla. Havainnollistava esitystapa toteutettiin siten, että tutkijalla oli neljä rasiaa, joihin hän asetti lukuja vastaavat määrät puupalikoita ja tyhjä rasia esitti kysyttävää lukua. (Sherman & Bisanz, 2009)

Yhtäsuuruusmerkin ymmärtäminen merkityksessä "anna vastaus" vaikeuttaa tutkijoiden Sherman & Bisanz (2009) mukaan yhtäsuuruuden ekvivalenttiuden ymmärtämistä. Kuvassa 3.1 on havainnollistus symbolikielen yhtälöstä $5 + 2 = 4 + \_\_$. Havainnollistavia välineitä käyttäneet lapset menestyivät huomattavasti paremmin näissä "osuus-kokonainen" -tyyppisissä (*part-whole*, $a + b = c + \_\_$) tehtävissä. Peräti 13 lasta 24:stä vastasi kaikkiin neljään tämän tyypin tehtävään oikein, kun symbolisen ryhmän vastaava otos oli yksi lapsi 24:stä. (Sherman & Bisanz, 2009)



Kuva 3.1: Yksinkertaistettu versio tutkijoiden Sherman & Bisanz havainnollistamasta ekvivalenssitehtävästä $5 + 2 = 4 + \_\_$.

Konteksti voi myös vaikuttaa yhtäsuuruusmerkin ymmärrykseen. Tutkijat McNeil & Alibali (2005a) tutkivat yhtäsuuruusmerkin käsitteen ymmärtämistä alakoululaisista yliopisto-opiskelijoihin ja totesivat sen muuttuvan tietynikäisillä kontekstin mukaan. Alakoululaiset ymmärsivät kontekstista riippumatta yhtäsuuruuden käsitteen operationaalisena ja fysiikan yliopisto-opiskelijat relationaalisena. Sen sijaan seitsemäsluokkalaiset, jotka ovat vasta opiskelemassa yhtäsuuruuden relationaalisuutta, näkivät yhtäsuuruusmerkin relationaalisena ekvivalenssitehtävissä, mutta muutoin operationaalisena. Tutkijoiden mukaan tulokset eivät ole yllättäviä, sillä alakoululaiset kohtaavat yhtäsuuruusmerkin lähinnä operationaalisena heille annettujen tehtävien takia. Yliopisto-opiskelijat puolestaan ovat opiskelleet jo niin paljon matematiikkaa, että heidän tapauksessaan yhtäsuuruuden operationaalinen ymmärrys on korvautunut relationaalisella ymmärryksellä. Seitsemäsluokkalaisten tuli myös selittää yhtäsuuruusmerkki omin sanoin ja arvioida valmiiksi annettuja määritelmiä yhtäsuuruudesta kolmessa eri kontekstissa. Ensimmäisessä kontekstissa yhtäsuuruusmerkki (=) esiintyi yksinään sivun ylälaidassa, toisessa se oli osana yhteenlaskuongelmaa $4 + 5 + 8 + 4 = \_\_$ ja kolmannessa osana ekvivalenssiyhtälöä $4 + 5 + 8 = 4 + \_\_$. Tulokset osoittivat, että seitsemäsluokkalaisten käsitykset yhtäsuuruudesta riippuvat kontekstista. (McNeil & Alibali, 2005a)

3.5 Oppilaiden käsityksiä yhtäsuuruudesta

Alakouluikäiset kykenevät oppimaan monimutkaista matemaattista ajattelua, mutta eivät saa siihen usein mahdollisuutta (Carpenter et al., 2003) Falkner, Levi & Carpenter (1999) ovat tutkineet yhdysvaltalaisten lasten käsityksiä yhtäsuuruudesta. Tutkijat huomasivat, että virhekäsitykset yhtäsuuruudesta voivat syntyä jo ennen kouluun menoa ja että jo päiväkoti-ikäisillä voi olla virheellinen kuva yhtäsuuruusmerkistä. Päiväkoti-ikäiset lapset ymmärtävät tutkijoiden mukaan esineiden välillä vallitsevan yhtäsuuruuden, mutta symbolisella tasolla oleva yhtäsuuruusmerkki tuottaa heille vaikeuksia. Lasten käsitykset yhtäsuuruudesta pitäisi tutkijoiden mukaan ottaa huomioon jo siinä vaiheessa, kun laskutoimitukset tulevat ensimmäisen kerran käsittelyyn, jotta virhekäsitykset eivät juurtuisi liian syvälle. (Falkner et al., 1999)

Yläkoululaisten yhtäsuuruusmerkin ymmärrystä tutkineet Knuth et al. (2006) pyysivät yläkoululaisia ensin nimeämään ja määrittelemään nuolen osoittaman yhtäsuuruusmerkin yhtälöstä $3+4 = 7$ ja sitten vielä pohtimaan, onko merkillä muita merkityksiä. Oppilaiden antamat yhtäsuuruusmerkin operationaaliset määritelmät olivat seuraavanlaisia:

– ”Tulos.”
– ”Lukujen summa.”
– ”Ongelman vastaus.”
– ”Kuinka paljon luvut ovat yhteenlaskettuna.”

Relationaaliset määritelmät olivat puolestaan seuraavanlaisia:

– ”Sama kuin, sama arvo.”
– ”Yhtäsuuruusmerkin vasen puoli on yhtä suuri kuin oikea puoli.”
– ”Se tarkoittaa, että merkin vasemmalla ja oikealla puolella olevat asiat tarkoittavat samaa.”

Kuudes- ja kahdeksasluokkalaisista enemmistö antoi yhtäsuuruusmerkille operationaalisen määritelmän ja vähemmistö relationaalisen. Sen sijaan seitsemäsluokkalaisista vähemmistö antoi operationaalisen ja enemmistö relationaalisen määritelmän. (Knuth et al., 2006) Myös McNeil & Alibali (2005a) selvittivät koehenkilöidensä käsityksiä yhtäsuuruusmerkistä ja totesivat sen olevan kontekstista riippuvaista. Käsitykset yhtäsuuruusmerkistä tutkijat jakoivat kolmeen: *operationaaliset määritelmät*, kuten ”tulos” ja ”vastaus”, *sekoittavat määritelmät*, kuten ”ongelman loppu” ja ”toista numeroita” sekä *relationaaliset määritelmät*, kuten ”ekvivalentti” ja ”sama lukumäärä kuin”. (McNeil & Alibali, 2005a)

Asquith, Stephens, Knuth & Alibali (2007) tutkivat yläkoululaisten ymmärrystä algebran peruselementtien yhtäsuuruus ja muuttuja suhteen. Tutkijat huomasivat, että opettajat yliarvioivat herkästi, miten hyvin oppilaat ymmärtävät nämä käsitteet. Tutkijat selvittivät yläkoululaisten yhtäsuuruuden relationaalista ymmärrystä lähes samalla tehtävällä kuin Knuth et al. (2006) sekä McNeil & Alibali (2005a) edellä. Oppilaiden piti nimetä esimerkkiyhtälöstä nuolen osoittama merkki = ja kertoa, mitä se tarkoittaa. Opettajia pyydettiin puolestaan arvioimaan sadan oman koulualueensa oppilaasta, kuinka monen käsitys olisi operationaalinen ja kuinka monen relationaalinen. Tutkijat huomasivat, että opettajat arvioivat kaikkien luokkatasojen oppilaiden relationaalisen ymmärryksen yhtäsuuruudesta yläkanttiin. Todellisuudessa yläkoulun kuudesluokkalaisista 29 % ymmärsi yhtäsuuruuden relationaalisuuden, mutta opettajat arvioivat prosenttiosuuden olevan keskimäärin

53 %. Seitsemännellä luokalla opettajien virhearvio oli vielä tätäkin suurempi. Opettajat arvioivat, että peräti 73 % seitsemäsluokkalaisista ymmärtäisi yhtäsuuruuden relationaalisuuden, kun todellinen osuus oli 37 %. Muutama opettaja jopa arvioi, että kaikki oppilaat osaisivat määritellä yhtäsuuruuden relationaalisesti. (Asquith, Stephens, Knuth, & Alibali, 2007)

Behr et al. (1980) huomasivat tutkimuksessaan, että osa 6–7-vuotiaista lapsista käänsi muotoa $\square = a+b$ olevat yhtälöt muotoon $a+b = \square$, mikä viittaa muutoksen vastusteluun totutusta poikkeavan yhtälön kohdalla. Lapset myös lukivat $\square = 1+2$ tyyppiset tehtävät muodossa: ”2 plus 1 on yhtä kuin 3.” Ekvivalenssitehtävissä, jossa molemmin puolin yhtäsuuruusmerkkiä on operaatioita, lapsilla oli hankaluuksia. Esimerkiksi yhtälö $2+3 = 3+2$ haluttiin muokata joko muotoon $2+3 = 5$ ja $3+2 = 5$ tai muotoon $2+3+3+5 = 10$. Muitakin virheellisiä ratkaisumalleja esitettiin, mutta myös oikeita. Tutkimus osoitti, että yhtäsuuruusmerkkiä ei nähty kahden yhtä suuren asian välillä, vaan laskuina, joissa tulisi tehdä jotakin. (Behr et al., 1980)

Kuten edellä huomattiin, lasten ja nuorten käsitykset yhtäsuuruudesta ja yhtäsuuruusmerkistä ovat monesti virheellisiä tai vajavaisia. Ei ole kuitenkaan olemassa yksiselitteistä vastausta siihen, mistä virhekäsitykset kumpuavat. Tutkijoiden Carpenter et al. (2003) mukaan syitä on lukuisia. Ensinnäkin lapset näkevät lähinnä muotoa $a+b=c$ olevia laskuja, joissa operaatio tehdään vasemmalla puolella yhtäsuuruusmerkkiä ja oikealle puolelle laitetaan vastaus. Toinen tekijä voi olla laskimen käyttö, sillä monissa laskimissa painetaan yhtäsuuruusmerkkiä, kun halutaan, että kone suorittaa siihen syötetyn laskun. Kolmantena tutkijat mainitsevat, että lapset näkevät yhtäsuuruuden herkästi laskujen vastauksen antajana eivätkä relaationa. Tutkijoiden mukaan yhtäsuuruusmerkin ymmärtäminen relaationaalisena ei kuitenkaan riipu lapsen iästä eikä edes laskutaidoista. Yhtäsuuruusmerkki on mahdollista ymmärtää relationaalisena jo nuorena ja tätä ymmärrystä pitäisi tutkijoiden mukaan vahvistaa läpi alakoulun. (Carpenter et al., 2003)

3.6 Opettajien käsityksiä yhtäsuuruudesta

Vermeulen & Meyer (2017) tutkivat etelä-afrikkalaisen alakoulun opettajien matemaattista tietotaitoa yhtäsuuruudesta ja huomasivat, että se on yllättävän heikko. Kukaan kolmesta tutkitusta opettajasta ei ollut erikoistunut matematiikan opetukseen. Tutkimuksen keskusteluosiossa opettajien relationaalinen käsitys yhtäsuuruudesta parani. Ennen keskusteluosiota oli kuitenkin selvää, ettei opettajien matemaattinen tietotaito yhtäsuuruudesta ollut riittävä, mikä rajoitti heidän kykyään tunnistaa, korjata, estää tai vähentää yhtäsuuruusmerkkiin liittyviä virhekäsityksiä. (Vermeulen & Meyer, 2017)

Tutkijat Attorps & Tossavainen (2007) perehtyivät opettajien käsityksiin yhtäsuuruudesta ja jakoivat tarkastelunsa kappaleessa 2.1 esitetyn ekvivalenssirelaation määritelmän 2.5 ehtojen mukaisesti. Tutkijat huomasivat, että opettajien käsitykset yhtäsuuruudesta olivat puutteellisia symmetrisyyden ja refleksiivisyyden osalta. He eivät kuitenkaan pystyneet selvittämään näiden käsityksiä yhtäsuuruuden transitiivisuudesta kyselyn kysymysten muotoilun vuoksi. Symmetrisyyden osalta tutkijat huomasivat, että triviaaliyhtälö $x = 2$ tulkittiin yhtälön vastauksena tai jo ratkaistuna yhtälönä. Tutkijoiden mukaan tulkinta, jossa yhtäsuuruusmerkki ymmärretään merkityksessä ”anna vastaus” tuo ilmi, että sitä käytetään aritmetiikasta tutulla tavalla eikä ymmärretä sen symmetrisyyttä. Opettajaopiskelijoista yhteensä 55 % ei pitänyt $x = 2$ yhtälönä. Kun tätä tarkasteltiin vielä sen suhteen, mille luokka-asteelle opiskelijat olivat suuntautumassa, saatiin jollakin tapaa odotettavissa oleva tulos. Luokanopettajaopiskelijoista peräti 75 % vastasi, ettei $x = 2$ ole yhtälö. Yläkouluun suuntautuvien opettajaopiskelijoiden ei-vastausten osuus oli 44 % ja lukioon suuntautuvien 38 %. Tutkijoiden mukaan tulokset valaisevat hieman sitä, miksi yhtäsuuruuden symmetrisyys jätetään usein vähemmälle huomiolle. (Attorps & Tossavainen, 2007)

Yhtäsuuruuden transitiivisuuden ymmärrystä tutkijat Attorps & Tossavainen (2007) tutkivat seuraavista yhtälöistä: $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ ja $cos^2\,\alpha + sin^2\,\alpha = 1$. Opettajista 25 % ei pitänyt ensimmäistä yhtälönä, mutta peräti 40 % ei pitänyt jälkimmäistä yhtälönä. Sen sijaan nämä ymmärrettiin sääntöinä tai kaavoina. Yhden opettajan mielestä ensimmäinen ei ollut yhtälö, koska yhtälön oikea ja vasen puoli kumoavat toisensa eikä jäljelle jää ratkaistavaa. Esiin nousi myös kysymys, onko kyseessä aina yhtälö, jos läsnä on yhtäsuuruusmerkki. Tutkijoiden mukaan tämä viittaa siihen, että yhtälöitä ei ole helppo nähdä yhtälöinä, jos molemmin puolin yhtäsuuruusmerkkiä on samat elementit. (Attorps & Tossavainen, 2007)

3.7 Yhtälöt ja yhtäsuuruus oppikirjoissa

Oppikirjat vaikuttavat opettajan näkemyksiin matematiikan sisällöistä ja siihen, miten hän asioita opettaa, ehdottavat tutkijat Vermeulen & Meyer (2017). Heidän mukaansa tämä lisääntyy erityisesti silloin, jos opettajat eivät itse ole saaneet riittävää koulutusta aiheeseen. Täten opettajat eivät helposti myöskään ole tietoisia siitä, että heidän opetuksensa saattaa vahvistaa oppilaiden virhekäsityksiä tai että mahdollisiin virhekäsityksiin pitäisi kiinnittää huomiota. (Vermeulen & Meyer, 2017) Oppikirjat siis vaikuttavat opettajien opetukseen, mutta ne vaikuttavat myös oppilaisiin.

Yhdysvaltalaisten yläkoulun oppikirjojen yhtälötyyppejä tutkineet McNeil, Grandau, Knuth, Alibali, Stephens, Hattikudur & Krill (2006) selvittivät myös eri yhtälötyyppien vaikutusta oppilaiden yhtäsuuruusmerkin ymmärtämiseen, ja huomasivat, että näillä on yhteys. Tutkijat havaitsivat, että epästandardimuotoiset yhtälöt, eli muut yhtälöt kuin ne, joissa operaatiot ovat vasemmalla puolella yhtäsuuruusmerkkiä, auttoivat oppilaita ymmärtämään yhtäsuuruuden paremmin relationaalisena. Tutkijat ehdottavat, että oppilaat voisivat hyötyä näiden tehtävien lisäämisestä. Tutkijat myös havaitsivat, että suurin osa yhtälöistä kuului standardien yhtälöiden kategoriaan, jossa operaatiot ovat vasemmalla. Sen sijaan oppikirjoissa ei ole heidän havaintojensa mukaan kovin paljon yhtälöitä, joissa on operaatioita molemmin puolin yhtäsuuruusmerkkiä, eli muotoa $a * b = c * d$ olevia yhtälöitä. (McNeil et al., 2006) Nämä yhtälöt kuitenkin ovat niitä, joiden on todettu erityisesti vaikuttavan oppilaiden yhtäsuuruuden relationaaliseen ymmärrykseen (McNeil & Alibali, 2005a). McNeil et al. (2006) mukaan myös muotoa $c = a * b$ sekä $a = a$ olevat yhtälöt voivat auttaa haastamaan perinteistä käsitystä yhtäsuuruuden operationaalisuudesta.

Myös Li, Ding, Capraro & Capraro (2008) tutkivat oppikirjoja ja niiden vaikutusta oppilaiden oppimiseen. Heidän tutkimuksensa vertaili yhdysvaltalaisten ja kiinalaisten 6.-luokkalaisten yhtäsuuruusmerkin osaamisen eroja. Tutkijat huomasivat, että erot ovat suuria maiden välillä. Kiinalaisista 6. luokan oppilaista lähes kaikki (91,7–98,6 %) osasivat ratkaista kaikki tutkijoiden asettamat tehtävät. Yhdysvaltalaisten oppilaiden taidot olivat huomattavasti heikommat ja osaamisprosentit vaihtelivat 23,8 ja 86,7 prosentin välillä. Erityisesti tehtävät, joissa oli tuntematon luku ja operaatioita kummallakin puolen yhtälöä, tuottivat haasteita yhdysvaltalaisille. Yhtälön $6 + 9 = \square + 4$ osasi ratkaista 98,6 % kiinalaisista, mutta vain 28,6 % yhdysvaltalaisista 6.-luokkalaisista. Yhdeksi mahdolliseksi syyksi maiden välillä tutkijat arvelevat olevan oppikirjoissa ja opettajan materiaaleissa. Tutkijat selvittivät myös eroja yhdysvaltalaisten alakoulun matematiikan opettajankoulutusmateriaalien sekä kiinalaisten opettajan materiaalien välillä yhtäsuuruusmerkin esittelyn ja opetusvinkkien osalta. Lisäksi he tutkivat kiinalaisia alakoulun oppikirjoja. Kiinalaiset oppimateriaalit käsittelevät tutkijoiden mukaan yhtäsuuruusmerkkiä monipuolisesti ja opettajan materiaaleissa kiinnitetään erityistä huomiota yhtäsuuruusmerkin ymmärtämiseen. Yhdysvaltalaisista materiaaleista vain parissa otettiin esille yhtäsuuruusmerkki, mutta yhdessäkään ei ollut ehdotuksia tai aktiviteetteja sen opettamiseen. Kiinalaisissa opettajan materiaaleissa sen sijaan oli runsaasti neuvoja opetukseen ja kehotuksia esitellä yhtäsuuruusmerkki monipuolisesti. (Li, Ding, Capraro, & Capraro, 2008)

Myös Powell (2012) tutki oppikirjojen yhtälöiden jakautumista kategorioihin, mutta hänen aineistonaan olivat alakoulun kirjat. Myös alakoulun kirjoissa suurin osa tehtävistä sijoittui standardiyhtälöiden kategorioihin. Powell tutki myös opettajan oppaita ja sitä, miten yhtäsuuruusmerkki niissä ilmenee. Yhtäsuuruusmerkki esiteltiin kirjasarjojen sisällä vuosiasteittain eri sanoin, mikä voi tutkijan mukaan olla oppilaille hämmentävää. Määritelminä ja esittelyinä olivat muun muassa ”on sama kuin”, ”on yhtä suuri kuin”, ”molemmilla puolilla on sama arvo”, ”jos kaksi lukumäärää ovat samat, kirjoita yhtäsuuruusmerkki” ja ”molemmat puolet ovat samat”. Eniten yhtäsuuruusmerkistä oli mainintoja esiopetuksen (*kindergarten*) ja 1. luokan kirjoissa, mikä on tutkijan mukaan järkeenkäypää, sillä silloin ensimmäiset laskutoimitukset esitellään. Näiden jälkeen oppikirjoissa ei juurikaan mainittu yhtäsuuruusmerkkiä, mikä puolestaan on tutkijan mukaan riittämätöntä, sillä yhtäsuuruusmerkin opetusta tulisi tarjota koko alakoulun ajan. (Powell, 2012)

Luku 4

Yhtälöiden ja yhtäsuuruuden opettamisesta

Kuten edellisissä osioissa on todettu, on yhtäsuuruuden käsitteen ymmärtäminen tärkeää, ellei jopa välttämätöntä algebrallisen ajattelun kehittymiselle, yhtälönratkaisun ymmärtämiselle sekä näiden kautta jopa matematiikan opinnoissa menestymiselle. Edellä on keskitytty lähinnä kuvailemaan ongelmia, joita oppilaat kohtaavat yhtälönratkaisussa ja millaisia virhekäsityksiä heille voi yhtäsuuruudesta muodostua. Tässä luvussa tarkastellaan ensin, miten yhtälöt ja yhtäsuuruus esiintyvät opetussuunnitelmien perusteissa. Sen jälkeen perehdytään ratkaisuehdotuksiin, kuinka yhtälöitä ja yhtäsuuruuden käsitettä kannattaisi lähestyä esiopetuksessa, ala- ja yläkoulussa.

4.1 Opetussuunnitelmien perusteet

Opetussuunnitelmien perusteet raamittavat opetusta, joten on tärkeää tutkia, miten yhtälöt ja yhtäsuuruuden käsite esiintyvät niissä. Tarkastelun kohteena ovat esiopetuksen ja perusopetuksen opetussuunnitelmien perusteet molempien käsitteiden osalta.

Vuoden 2014 esiopetuksen opetussuunnitelmien perusteet antavat esiopettajille melko vapaat kädet matematiikan opetuksen toteuttamiseen. Esiopetuksen tehtävä on herättää ja tukea lasten kiinnostusta matematiikkaa kohtaan sekä auttaa lapsia heidän matemaattisen ajattelunsa kehittymisessä. Opetuksen kannustetaan tapahtuvan pääasiassa leikin ja pelien kautta ja siinä kehotetaan käyttämään ongelmanratkaisu- ja tutkimustehtäviä päättelyn, oivaltamisen, ratkaisujen ja uuden löytämisen ilon sekä elämysten tarjoajana. (Opetushallitus, 2014a) Näitä taitoja tarvitaan aikanaan myös yhtälönratkaisussa, jossa varsinkin ongelmanratkaisutaidot ovat olennaisessa osassa. Yhtäsuuruuden käsitettä tai yhtälöitä ei mainita esiopetuksen opetussuunnitelman perusteissa, mutta muun muassa lukumäärien vertailu ja lukumäärän muutoksen tutkiminen käytännön esimerkein mainitaan (Opetushallitus, 2014a). Nämä ovat erityisen tärkeitä taitoja yhtäsuuruuden käsitteen ymmärtämisen kannalta.

Peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa (2014) ei myöskään mainita yhtäsuuruusmerkkiä tai yhtäsuuruutta erikseen, mutta yhtäsuuruuden käsite sisältyy kuitenkin seuraaviin osa-alueisiin. Ensinnäkin matematiikan ymmärtämiseen tarvitaan sen käsitteiden ja rakenteiden ymmärrystä ja tämän pohjan luominen on yksi matematiikan oppiaineen tehtävistä alakoulun vuosiluokilla 1–6, ja yhtäsuuruus kuuluu tärkeimpien matematiikan käsitteiden joukkoon. Lisäksi alakoulumatematiikan oppiainekohtaisiin tavoitteisiin kuuluvat muun muassa yhtäläisyyksien, erojen ja säännönmukaisuuksien havainnointi, vertailu, luokittelu sekä erilaiset syy- ja seuraussuhteet, jotka vaikuttavat osaltaan yhtäsuuruuden käsitteen muodostumiseen. (Opetushallitus, 2014b) Yhtäsuuruus on siis hyvin merkittävä matemaattinen käsite ja läsnä monen aiheen tarkastelussa, vaikka termiä ei opetussuunnitelman perusteissa erikseen mainita. Yhtälöt esiintyvät ensimmäisen kerran vuosiluokkien 3 – 6 matematiikan tavoitteiden keskeisissä sisältöalueissa. Tavoitteiksi on listattu muun muassa yhtälöiden tutkiminen ja ratkaisujen etsiminen päättelemällä ja kokeilemalla. Myös tuntemattoman käsite otetaan esille näillä vuosiluokilla. (Opetushallitus, 2014b)

Yläkoulun matematiikan opetuksen tavoitteita ovat yhtälöiden osalta oppilaan yhtälönratkaisutaitojen kehittäminen sekä tuntemattoman käsitteen ymmärtäminen. Matematiikan oppiaineen keskeisissä sisällöissä mainitaan ensimmäisen asteen yhtälöt, yhtälöparit, epäyhtälöt sekä vaillinaiset toisen asteen yhtälöt. Peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa yhtälöt löytyvät myös kemian kohdalta, sillä keskeiset sisällöt mainitsevat kemian osalta yksinkertaisten reaktioyhtälöiden harjoittelemisen. Myös funktiot ovat yhtälöitä ja näistä matematiikan keskeiset sisällöt mainitsevat muun muassa riippuvuuksien kuvaamisen algebrallisesti ja graafisesti, suorien ja paraabelien piirtämisen koordinaatistoon, funktion nollakohtien määrittämisen ja kuvaajien tulkitsemisen sekä muuttujan, suoran kulmakertoimen ja vakiotermin käsitteiden oppimisen. (Opetushallitus, 2014b)

4.2 Ehdotuksia yhtäsuuruuden opettamiseen

Esiopetuksen matematiikka lähtee liikkeelle lukujen ja lukujonotaitojen opettelusta. Vaikka operaatiot ja varsinaiset laskutoimitukset kuuluvat ennemminkin alakoulun oppimateriaaliin, voidaan näitä ottaa käsittelyyn myös esiopetuksen puolella. Ikäheimo (1997) esittelee keskeisimpiä solmukohtia alakoulun matematiikan opetuksessa. Näistä ensimmäisten joukkoon kuuluvat muun muassa lukukäsite, yhteen- ja vähennyslaskut sekä yhtä suuri kuin -käsite. (Ikäheimo, 1997) Näitä solmukohtia tulisi Ikäheimo, Aalto & Puumalainen (1998) mukaan harjoitella jo esiopetuksessa leikkien ja pelien kautta. Leikkiessään lapsi ei edes huomaa harjoittelevansa vaikeita asioita ja jaksaa siksi harjoitella uudelleen ja uudelleen. (Ikäheimo, Aalto, & Puumalainen, 1998)

Koska lapsille voi syntyä virhekäsityksiä yhtäsuuruudesta jo ennen kouluikää, tulisi lasten käsityksiin kiinnittää huomiota alusta alkaen (Falkner et al., 1999). Opettajien tulisi tarjota oppilaille mahdollisimman monipuolinen kuva yhtäsuuruudesta tutkijoiden McNeil & Alibali (2005a) mukaan. He esittävät, että erityisesti yhtäsuuruusmerkin operationaalinen merkitys tulisi haastaa, jotta yhtäsuuruuden käsite ymmärrettäisiin paremmin. Tutkijat kehottavat tarjoamaan tällaista opetusta heti matematiikan opintojen alkutaipaleella. (McNeil & Alibali, 2005a) Symbolista $=$ tulisi myös alusta asti käyttää termiä yhtäsuuruusmerkki eikä ”on”-merkki (Ikäheimo, 1997).

Ikäheimon (1997) mukaan oppilaan käsitteenmuodostusta painottavassa opetuksessa tarkastellaan opeteltavaa asiaa kokonaisuutena. Hänen mukaansa uuden asian opettelussa on hyvä lähteä liikkeelle konkreettiselta tasolta havainnollistamisvälineitä apuna käyttäen tutkimalla ja kokeilemalla. Tämän jälkeen asiat liitetään lapsen omaan kokemusmaailmaan keskustelemalla ja opettajan käyttämien havainnollistusten avulla, sitten symboleiden avulla ja vasta lopuksi kirjallisesti symbolitasolla. (Ikäheimo, 1997) Lukukäsitteen muodostuminen alkaa konkretian tasolta ja syventyy kahden abstraktiotason kautta, jotka on havainnollistettu taulukkoon 4.1 (Ikäheimo et al., 1998). Lukukäsitteen ja lukujonotaitojen kartuttua voidaan siirtyä ensimmäisiin laskuihin. Kuitenkin ennen kuin lapsille opetetaan merkit + ja =, tulisi lasten kyetä laskemaan vähintään lukuun 20 asti, kirjoittamaan numerot sekä yhdistämään lukumäärä varmasti lukujen jonoon varmasti (Furness & Kiuru, 2000).

Taulukko 4.1: Luonnollisten lukujen kolme käsitetasoa Ikäheimoa (1997) mukaillen.

Käsite	**Esimerkki**	**Taso**	**Selite**
Lukumäärä	⚽ ⚽ ⚽	konkretia	eri aistein
Lukusana	”kolme”	abstraktio	suullinen ja kirjallinen
Luku	3	abstraktio	visuaalinen

Yhtäsuuruutta kannattaa tutkijoiden Ikäheimo et al. (1998) mukaan konkretisoida samankokoisilla, erikokoisilla ja erimuotoisilla esineillä sekä välineillä. Tutkijoiden mukaan symbolitasoa ja konkretian tasoa ei tule sekoittaa (Ikäheimo et al., 1998) ja myös tutkijat Carpenter et al. (2003) kehottavat välttämään yhtäsuuruusmerkin käyttöä esineiden ja asioiden välillä sekä esimerkiksi iän merkitsemistä yhtäsuuruusmerkin ja numeron avulla. Ikäheimo et al. (1998) korostavat sitä, että alusta asti tulisi käyttää myös oikeaa terminologiaa käsitteistä puhuttaessa. Kun vertailuoperaattoreita käytetään symbolitasolla tulisi käyttää termejä yhtä suuri kuin $=$, erisuuri kuin $\neq$, suurempi kuin $>$ ja pienempi kuin $<$. Silloin, kun näitä käytetään konkretian tasolla, tulisi käyttää termejä yhtä monta kuin, ei yhtä monta kuin, enemmän kuin ja vähemmän kuin. Esimerkkinä Ikäheimo et al. (1998) ottavat eläinten lukumäärien vertailun. Konkretian tasolla asiasta puhuttaessa sanotaan:

”Viisi muurahaista on enemmän kuin neljä elefanttia”, mutta symbolitasolla sama merkitään $5 > 4$ ja luetaan: ”Luku viisi on suurempi kuin luku 4.” (Ikäheimo et al., 1998) Taulukkoon 4.2 on kerätty tutkijoiden Carpenter et al. sekä Ikäheimo et al. vinkkejä siitä, millaisia merkintätapoja tulisi välttää ja taulukkoon 4.3 sellaisia, joita kannattaa suosia.

Taulukko 4.2: Vältettäviä merkintöjä Ikäheimo et al. (1998) ja Carpenter et al. (2003) mukaan.

Vältä näitä merkintöjä

Merkintä	**Selitys**
⚽ ⚽ ⚽ = ⚽ ⚽ ⚽	Kahden konkreettisen mallin vertaaminen toisiinsa vertailuoperaattorien avulla.
☆ ☆ < ☆ ☆ ☆	
🚲 🚲 🚲 🚲 = 4	Kokoelman objektien lukumäärän merkitseminen yhtäsuuruusmerkin avulla.
Kalle = 8, Nelli = 7	Ihmisten ikien tai muiden numeeristen ominaisuuksien merkitseminen yhtäsuuruusmerkin avulla.
$20 - 5 = 15 + 4 = 19$	Yhtäsuuruusmerkin ketjutusvirhe, jossa yhtäsuuruus ei säily.

Tutkijat Byrd et al. (2015) kehottavat keskittymään lasten tulkintoihin yhtäsuuruusmerkistä ennen esialgebrallisten taitojen opetusta. Virhekäsityksistä voi heidän mukaansa tulla muutoin liian pysyviä. Tutkijoiden mukaan lapsille esitellään herkästi liian kapeakatseinen tulkinta yhtäsuuruusmerkistä operationaalisena, ja tämän tulkinnan he myös omaksuvat herkästi. Tutkijat myös toteavat, että lapsilla voi olla haitallisempiakin virhekäsityksiä yhtäsuuruusmerkistä kuin operationaalinen ymmärrys (Byrd et al., 2015), joita on relationaalisen käsityksen sisälläkin. (Mirin, 2019)

Yksinkertaiset yhtälöt esitellään jo alakoulussa, joten tutkijat Alexandrou-

Taulukko 4.3: Suositeltavia merkintöjä Ikäheimo et al. (1998) ja Carpenter et al. (2003) mukaan.

Suosi näitä merkintöjä

<table>
<tr><th>Merkintä</th><th>Selitys</th></tr>
<tr><td>⚽⚽ ⚽⚽</td><td>Kahden konkreettisen mallin väliin ei laiteta vertailusymbolia.</td></tr>
<tr><td>$2 = 2$</td><td>Numerosymbolien väliin voi laittaa yhtäsuuruusmerkin.</td></tr>
<tr><td>☆☆ ☆☆☆</td><td>Kahden konkreettisen mallin väliin ei laiteta vertailusymbolia.</td></tr>
<tr><td>$2 < 3$</td><td>Numerosymbolien väliin voi laittaa pienempi kuin -merkin.</td></tr>
<tr><td>🏍🏍🏍
3 mopoa</td><td>Kokoelman objektien lukumäärän merkitseminen ilman yhtäsuuruusmerkkiä.</td></tr>
<tr><td><table><tr><th>Nimi</th><th>Ikä</th></tr><tr><td>Kalle</td><td>8</td></tr><tr><td>Nelli</td><td>7</td></tr></table></td><td>Ihmisten iät ja muut numeeriset ominaisuudet voi merkitä esimerkiksi taulukkoon.</td></tr>
<tr><td>$20 - 5 = 15$
$15 + 4 = 19$</td><td>Yhtälön ratkaiseminen vaiheittain, jolloin yhtäsuuruudet ovat voimassa.</td></tr>
</table>

Leonidou & Philippou (2007) kehottavat alakoulun opettajia kiinnittämään tarkemmin huomiota yhtälönratkaisun tunnuspiirteisiin, kuten yhtäsuuruuteen. Myös heidän mukaansa jo alakoulussa pitäisi keskittyä vahvistamaan oppilaiden ymmärrystä yhtäsuuruusmerkin ekvivalenttiuden ja proseptuaalisuuden suhteen sekä puuttua vaikeuksiin ja virhekäsityksiin. (Alexandrou-Leonidou & Philippou, 2007) Yhtäsuuruusmerkin relationaalisuuden ymmärrystä voi tutkijoiden Hattikudur & Alibali (2010) mukaan parantaa opettamalla samanaikaisesti vertailuoperaattoreita. Tutkijat totesivat, että oppilaat, joiden oppitunnilla vertailtiin erisuuruuksia $<$ ja $>$ ja yhtäsuuruutta $=$, tuntuivat ymmärtävän yhtäsuuruuden relationaalisuuden paremmin kuin vertailuryhmät. (Hattikudur & Alibali, 2010)

Ennen algebran opintoja yhtäsuuruusmerkki nähdään usein operationaalisena eikä aritmeettisten yhtälöiden rakennetta ymmärretä (Stephens et al., 2013). Ymmärrys ei muodostu niin, että oppilaille vain kerrotaan, mitä yhtäsuuruusmerkki tarkoittaa (Carpenter et al., 2003). Hyvä keino on harjoitella yhtäsuuruuden ekvivalenttiutta ensin konkretian kautta esimerkiksi kuvan 3.1 kaltaisten tehtävien avulla ja vasta sitten symbolikielellä (Sherman & Bisanz, 2009). Stephens et al. (2013) toteavat, että oppilaat hyötyvät myös siitä, että tehtävät rakennetaan huolellisesti kumulatiivisiksi. Tällaisissa tehtävissä siis uusi tieto muodostuu jo opitun päälle ja auttaa haastamaan virheellisiä käsityksiä. Erityisesti seuraavanlaiset symmetrisyyttä sisältävät yhtälöt $3+5=\square+3$ sekä suuria lukuja sisältävät yhtälöt, kuten $39+121=121+\square$ voivat auttaa oppilaita haastamaan operationaalisen ymmärryksen yhtäsuuruusmerkistä, sillä niissä huomio kiinnittyy laskemisen sijaan yhtälön rakenteeseen. Tämäntyyppisistä yhtälöistä on myös hyvä keskustella yhteisesti ja pohtia yhtälöiden rakennetta. (Stephens et al., 2013) Tutkijat McNeil et al. (2006) ehdottavat, että erityisesti yhtälöt, joissa operaatioita on molemmin puolin yhtälöä, kuten $3+4=5+2$ auttavat yhtäsuuruusmerkin ymmärtämisessä relationaalisena. Lisäksi yhtälöt, joissa operaatiot ovat oikealla puolen yhtälöä, kuten $7=3+4$ ja yhtälöt, joissa ei ole operaatioita, kuten $7=7$, ovat tehokkaampia operationaalisen ymmärryksen haastamisessa kuin standardimuotoiset yhtälöt, kuten $3+4=7$. (McNeil et al., 2006)

Yhtäsuuruus yhtälönratkaisussa

Yhtälönratkaisussa tärkeintä on ymmärtää, että yhtäsuuruusmerkin molemmilla puolilla on yhtä suuret asiat (Ikäheimo, 1997). Ikäheimo (1997) mainitsee, että symbolitason laskuihin, joissa käytetään tuntemattoman luvun paikalla laatikkoa, kuten yhtälössä $3+\square=5$, tulisi antaa sanallisia esimerkkejä. Yhtälöiden opettamiseen Ikäheimo (1997) ehdottaa yhdeksi hyväksi keinoksi yhtälöiden muuttamisen tarinoiden muotoon. Tämä sopii erityisesti alakoulun helpohkoihin kokonaisluvuilla toteutettaviin yhtälöihin, mutta voi auttaa ymmärtämään tuntemattoman käsitettä. Yhtälötarinoita eri operaatioille on esitelty taulukossa 4.4.

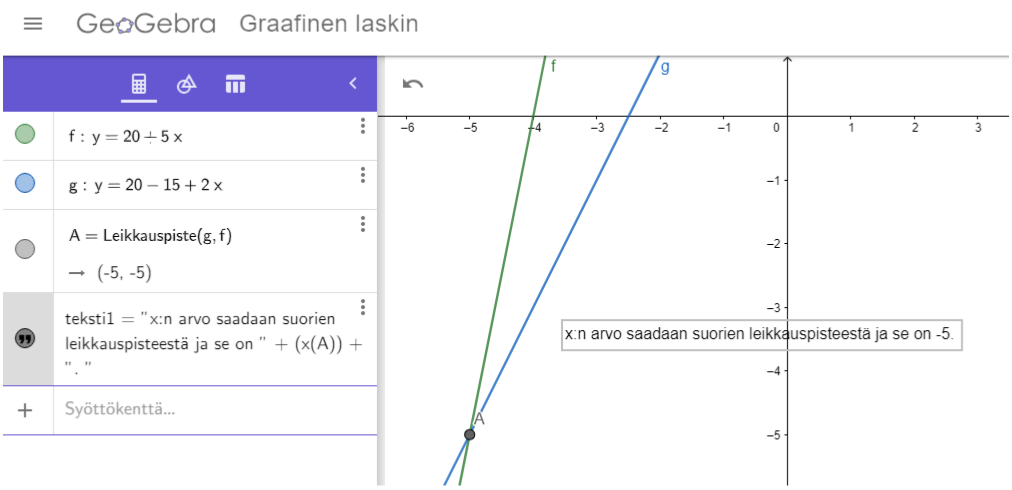
Taulukko 4.4: Ikäheimon (1997) esittelemiä yhtälötarinoita.

Yhtälö	**Tarina**
$\square + 2 = 10$	”Akvaariossa oli muutama kala. Sain 2 lisää ja sen jälkeen minulla oli yhteensä 10 kalaa. Kuinka monta kalaa minulla oli ennestään?”
$2 \cdot \square = 10$	”Kahdella lautasella oli yhtä monta pullaa ja pullia oli yhteensä 10. Kuinka monta pullaa oli kummallakin lautasella?”
$\square : 2 = 10$	”Liimasin valokuvia kahdelle sivulle valokuvakansiossa. Kummallekin sivulle tuli 5 kuvaa. Kuinka monta valokuvaa liimasin?”

Vlassis (2002) ehdottaa tasapainovaa'an käyttöä yhtälönratkaisutaitojen tukemisessa. Tasapainovaaka on hänen mukaansa hyvä keino konkretisoida samojen operaatioiden tekemistä yhtälön molemmille puolille. (Vlassis, 2002) Eräs malli, joka voi auttaa joitakin oppilaita ymmärtämään yhtälönratkaisua, on tutkijoiden Star, Pollack, Durkin, Rittle-Johnson, Lynch, Newton & Gogolen (2015) mukaan vertailevien ratkaisutapojen käyttö. Tutkijaryhmä on kehittänyt yhtälönratkaisumallin, jossa kaksi kuvitteellista hahmoa ratkaisee yhtälöt eri tavoin ja selittävät puhekuplassa, mitä tekivät. Oppilaiden tulee tämän jälkeen vastata kysymyksiin, kuten miten hahmot ratkaisivat yhtälöt ja miksi he tekivät kuten tekivät. (Star et al., 2015) Suomessa vastaavaa mallia ”joustava yhtälönratkaisu” on kehittänyt työryhmä, jonka materiaali on vapaasti saatavilla OuLuman sivuilla.

Tutkijat Alexandrou-Leonidou & Philippou (2007) kehottavat myös yläkoulun opettajia tutustumaan oppilaiden mahdollisiin virhekäsityksiin yhtäsuuruudesta ja keskittyä korjaamaan niitä ennen muiden algebrallisten konseptien, kuten symbolien ja algoritmien esittelyä. (Alexandrou-Leonidou & Philippou, 2007) Tutkijoiden Knuth et al. (2006) mukaan yläkoulussa pitäisi kiinnittää enemmän huomiota yhtäsuuruusmerkin merkitykseen ja keskustella oppilaiden kanssa sen oikeasta käytöstä esimerkiksi tyypillisen yhtäsuuruusmerkin ketjutusvirheen ($2+8 = 10 : 2 = 5+3 = 8$) yhteydessä. He myös kannustavat opettajia antamaan tehtäviä, joissa yhtäsuuruusmerkin relationaalisuus tulee paremmin esille. (Knuth et al., 2006)

Ratkaisuna yhtäsuuruusmerkin relationaalisuuden ymmärtämiseen yläkoulussa tutkijat Ko & Karadag (2013) ehdottavat keskittymistä graafisiin esityksiin ja niiden vertailuun. Kuvan 4.1 tilanne on yksinkertaisempi kuin tutkijoiden Ko & Karadag ehdottama lähestymistapa, mutta voi toimia hyvänä ensimmäisenä askeleena yhtäsuuruuden hahmottamisessa kuvaajien avulla.



Kuva 4.1: Yhtäsuuruuden hahmottamista Geogebra-ohjelmistolla, jossa selvitetään x:n arvoa yhtälöstä $20 + 5x = (20 - 15) + 2x$.

Luku 5

Tutkimuksen toteutus

Tämän tutkimuksen tarkoituksena on selvittää, tukevatko esiopetuksen sekä ala- ja yläkoulun matematiikan oppimateriaalit yhtäsuuruusmerkin relationaalisen tulkinnan muodostumista. Yläkoulussa yhtälöt muodostavat merkittävän osan matematiikan opinnoista ja yhtäsuuruusmerkin ymmärtäminen relationaalisena on keskeistä yhtälönratkaisun oppimiselle. Tämän vuoksi on tärkeää selvittää, miten ja missä vaiheessa matematiikan opintoja yhtäsuuruusmerkki esitellään ja kuinka paljon sen ymmärtämiseen kiinnitetään huomiota. Oppikirjat on valittu tutkimuskohteeksi siksi, että ne yleensä raamittavat opetusta. Lisäksi tutkimustulosten sekä aiempien tutkimusten pohjalta kehitetään täydentävä oppimateriaali yhtäsuuruuden käsitteen ja yhtäsuuruusmerkin opettamiseen eri luokka-asteille.

5.1 Tutkimusmenetelmä

Oppikirja-analyysissa käytetään laadullista sisällönanalyysiä, sillä tehtävä- ja yhtälötyyppejä tutkitaan monipuolisesti. Tätä menetelmää käytetään sekä tutkimuksen ensimmäisessä että toisessa osassa. Tämän lisäksi oppikirjoja kuitenkin analysoidaan myös määrällisten menetelmien avulla, sillä laajan aineiston tutkimiseen eivät riitä pelkät kvalitatiiviset menetelmät. Sisällönanalyysin tarkoitus on tutkijoiden Tuomi & Sarajärvi (2018) mukaan saada tutkittava materiaali järjestettyä ja selkeytettyä, jotta siitä voidaan tehdä luotettavia johtopäätöksiä. Schreier (2012) mainitsee laadullisen sisällönanalyysin olevan joustava menetelmä datan systemaattiseen järjestämiseen ja kuvailuun. Lisäksi tutkimuskysymykset määrittelevät sen, miten tutkimuksen tuloksia tarkastellaan. Laadullinen sisällönanalyysi on sopiva tutkimusmenetelmä tutkimukseen, jossa tulosten merkityksestä tehdään tulkintoja. (Schreier, 2012)

Sisällönanalyysin voi tiivistää kolmeen vaiheeseen tutkijoiden Miles & Huberman (1994) mukaan ja tutkijat Tuomi & Sarajärvi (2018) ovat suomentaneet nämä vaiheet seuraavasti: 1) datan redusointi eli pelkistäminen, 2) datan klusterointi eli ryhmitteleminen ja 3) datan abstrahointi eli käsitteellistäminen (Tuomi, 2018; Miles & Huberman, 1994). Schreier (2012) puolestaan ehdottaa laadullisen sisällönanalyysin vaiheiksi seuraavia: 1) tutkimuskysymysten asettaminen, 2) tutkimusaineiston valitseminen, 3) koodaus, 4) aineiston pienen otannan jakaminen koodauksen mukaisiin osiin, 5) koodauksen testaus pienellä otannalla, 6) koodauksen toimivuuden arviointi ja muokkaaminen, 7) pääanalyysi sekä 8) tulosten tulkitseminen ja raportoiminen (Schreier, 2012). Aineiston tehtävät jaetaan kategorioihin niiden ominaisuuksien perusteella. Sen jälkeen aineistosta tutkitaan muun muassa frekvenssejä eli esiintymiskertojen lukumääriä, suhteellisia frekvenssejä eli osuusprosentteja sekä moodeja eli tyyppiarvoja. Tulosten merkitsemisen tukena käytetään erilaisia kuvaajia ja taulukoita, sillä aineisto on hyvin laaja.

Tutkimuksessa on myös piirteitä kehittämistutkimuksesta. Pernaa (2013) kirjoittaa kehittämistutkimuksen lähtökohtana olevan aina todellisessa opetustilanteessa havaittu ongelma, joka kaipaa ratkaisua. Kehittämistutkimukselle on luonteenomaista luoda teorian pohjalta kehittämistä ja havainnoida saatuja tuloksia kehittäen niitä yhä paremmiksi sekä luoda lopulta näiden pohjalta uusi teoria, jonka pohjalta opetusta voidaan kehittää. (Pernaa, 2013) Tämän tutkimuksen osalta kehittämistutkimus jää tasolle, jossa tutkimustiedon pohjalta luodaan oppimateriaali. Kehittämistutkimukselle ominaiset useamman kehitys-, arviointi- ja raportointivaiheen tutkimussyklit (Pernaa, 2013) jäävät täysin väliin, sillä oppimateriaalia ei päästä testaamaan.

5.2 Tutkimuskysymykset

Olen edellä esitellyt yhtälönratkaisutaitoihin liittyvää aiempaa tutkimusta ja keskittynyt erityisesti yhtäsuuruusmerkin relationaalisen ymmärryksen tärkeyteen. Koska tarkoituksenani on kartoittaa yhtäsuuruuden käsitteen oppimista ja opettamista, on luontevaa tutkia, miten yhtäsuuruusmerkki esiintyy oppikirjojen tehtävissä. Aiemman tutkimuksen perusteella lukuisat asiat vaikuttavat yhtäsuuruuden relationaalisen ymmärryksen kehittymiseen ja edellä kokosin myös aiemmista tutkimuksista sekä muista materiaaleista löytämiäni ehdotuksia yhtäsuuruusmerkin opettamiseen. Näiden pohjalta päädyin tarkastelemaan oppikirjoja yhtäsuuruusmerkin lisäksi myös yhtäsuuruuden käsitteen sekä ongelmanratkaisutaitojen vahvistamisen näkökulmasta.

Tämä tutkimus on jakautunut kahteen osaan. Tutkimuksen ensimmäisessä osassa perehdyn alakoulun oppikirjojen yhtälötehtävien kategorioihin ja selvitän vastauksia seuraaviin tutkimuskysymyksiin:

1. Millaisia yhtälöitä alakoulun matematiikan oppikirjat sisältävät ja millaisiin kategorioihin yhtälöt voidaan jakaa?
2. Miten tehtävät jakautuvat kategorioihin luokka-asteiden välillä?
3. Miten tehtävät jakautuvat kategorioihin oppikirjasarjojen välillä?

Yhtälöiden tutkiminen on samalla myös yhtäsuuruusmerkin tutkimista. Ensin pyrin selvittämään oppikirjojen yhtälötehtävien tehtävätyyppejä ja seuraavaksi sitä, miten ne sijoittuvat yhtälökategorioihin. Kolmannen tutkimuskysymyksen kautta selvitän, onko oppikirjojen välillä eroja ja jos on, niin millaisia. Oletan, että kaiken kaikkiaan tutkittavissa oppikirjoissa suurin osa yhtälöistä esiintyy standardimuodossa $1 + 2 = 3$, kuten aiemmissa tutkimuksissa on havaittu (McNeil et al., 2006; Pursiainen & Suontakanen, 2016; Li et al., 2008; Powell, 2012). Oletan kuitenkin, että standardimuotoisten yhtälötehtävien osuus vähenee vuosiluokkien edetessä. Kolmas hypoteesi on, että epästandardien yhtälöiden osuus kasvaa vuosiluokkien edetessä.

Tämä tutkimuksen ensimmäinen osa on hyvin samankaltainen kuin Riina Pursiaisen ja Tiia Suontakasen Pro gradu -tutkielma (2016). He selvittivät tutkielmassaan luokka-asteiden 1–3 osalta kolmen oppikirjasarjan sisältämiä yhtälöitä lähes identtisten tutkimuskysymyksien kautta. (Pursiainen & Suontakanen, 2016) Tässä tutkimuksessa on kuitenkin mukana heidän käyttämistään oppikirjoista vain yksi ja kategoriajako on myös hieman erilainen.

Tutkimuksen toisessa osassa selvitän yhtäsuuruuden ja yhtälöiden yhteyttä tarkemmin eri kouluasteilla. Haen tutkimuksessa vastausta seuraaviin tutkimuskysymyksiin:

4. Miten yhtäsuuruus ja yhtälöt on määritelty esiopetuksen, ala- ja yläkoulun matematiikan oppikirjoissa?

5. Millaisia vinkkejä opettajan oppaissa annetaan näiden käsitteiden opettamiseen?

Tutkimuksessa selvitetään yhtäsuuruuden ja yhtälöiden määritelmien eroja oppikirjoissa sekä käytettyjä sanamuotoja. Lisäksi selvitetään, millaisia vinkkejä sekä mahdollisia muita lisähuomioita opettajan oppaat tarjoavat yhtäsuuruuden ja yhtälöiden opetukseen. Toisin sanoen selvitetään laajemmin, millaisen kuvan oppikirjat antavat yhtäsuuruusmerkistä. Yhtäsuuruuden ja yhtälöiden määritelmät sekä opettajan oppaiden vinkit antavat viitteitä myös siitä, miten tärkeäksi käsitteeksi yhtäsuuruus oppikirjoissa koetaan.

5.3 Aineiston keruu

Tutkimuksen ensimmäisessä osassa tutkittiin alakoulun 1.–6. luokan matematiikan oppikirjoja. Aineistona olivat sähköisessä muodossa olevat Kustannusosakeyhtiö Otavan Tuhattaituri ja Sanoma Pron Kymppi -kirjojen opettajan oppaat, joista kuitenkin rajattiin opettajan osiot pois. Molemmissa oppikirjasarjoissa on sekä kevään että syksyn kirjat erikseen, joten tutkittavia oppikirjoja oli yhteensä 24.

Tutkimuskysymysten ja -aineiston valitsemisen jälkeen kvalitatiivisessa sisällönanalyysissä on Schreierin (2012) mukaan koodausvaihe. Tässä vaiheessa suunniteltiin alustava kategoriajako. Seuraavassa vaiheessa pieni otanta jaettiin kategorioihin (Schreier, 2012). Tämä datan pelkistämisvaihe (Tuomi,

2018) suoritettiin 1. luokan oppikirjoille. Oppikirjojen yhtälöitä sisältävät tehtävät taulukoitiin alustaviin alakategorioihin. Pelkistämisvaiheeseen kuuluu olennaisena osana myös turhan datan karsiminen pois (Tuomi, 2018), joten myös alustava 0-kategoria eli tutkimuksen ulkopuolelle jäävien tehtävien kategoria luotiin. Pelkistämisvaiheessa kuuluu myös huomioida, että yhdestä datapisteestä voi löytyä useampia ominaisuuksia (Tuomi, 2018). Tässä tutkimuksessa tehtävät päätettiin kuitenkin jakaa vain yhteen kategoriaan, vaikka ne olisivat sisältäneet useamman kategorian yhtälöitä. Tämän vuoksi luotiin myös prioriteettitaulukko, joka esitellään kategoriajaon jälkeen.

Tämän jälkeen Schreier (2012) ehdottaa testaamaan koodauksen soveltuvuutta sekä arvioimaan ja muokkaamaan sitä, minkä vuoksi 1. luokan oppikirjojen kategorioihin sopivat tehtävät laskettiin yhteen ja selvitettiin tehtävien sijoittumista ylä- ja alakategorioihin muun muassa piirakkadiagrammien avulla. Tässä yhteydessä päätettiin tiputtaa yhtälökategoriat "ei yhtälöä", jossa lisätään puuttuvat vertailuoperaattorit ($<, >$ ja $=$) sekä kategoria, jonka yhtälöissä ei ole operaatioita. Nämä molemmat sulautettiin osaksi vertailuoperaattoreita sisältävää kategoriaa muun muassa tehtävien vähyyden vuoksi. Kategoriajaon arvioinnin jälkeen oli myös melko selvää, millaiset tehtävät jäisivät tutkimuksen ulkopuolelle.

Toisessa, eli datan ryhmittelyvaiheessa (Tuomi, 2018) dataa alettiin käydä läpi ja jakaa alaluokkiin. Tässä pääanalyysissa (Schreier, 2012) tehtävät jaettiin kategorioihin siten, että taulukko-ohjelmaan laitettiin ylös jokaisen kirjan jokaisesta kappaleesta kuhunkin kategoriaan sopivien tehtävien yhteismäärä sekä myös kappaleen kaikkien tehtävien sekä tutkimuksen kategoriajakoon soveltuvien ja soveltumattomien tehtävien yhteismäärät. Toisella läpikäynnillä päätettiin lisätä taulukko, jossa jokainen tehtävä merkittiin erikseen koodilla. Jos lukumäärä oli muuttunut ensimmäisen läpikäynnin jälkeen, korjattiin lukema alkuperäiseen taulukkoon. Kolmas läpikäynti oli tarkistuskierros, jolla pyrittiin minimoimaan näppäilyvirheet ja jossa pyrittiin varmistamaan, että tehtävät oli jaoteltu kategorioihin samalla tavalla eri oppikirjoissa.

Viimeisellä tarkastuskierroksella pyrittiin lisäämään tutkimuksen luotettavuutta, sillä Schreierin (2012) mukaan kvantitatiivisen sisällönanalyysin olennainen osa on luotettavuuden kannalta kaksoiskoodaus, ja tätä tutkimusta teki vain yksi henkilö. Kvantitatiivisen datan luotettavuutta lisää se, ettei datassa tai sen tarkastelussa ole virheitä sekä johdonmukaisuus ja stabiilius. Kvalitatiivisen tutkimuksen luotettavuutta voi sen sijaan lisätä tutkimuksen systemaattisella etenemisellä sekä läpinäkyvyydellä. (Schreier, 2012)

Tutkimuksen toisessa osassa oli mukana yhteensä 11 oppikirjaa, jotka olivat esiopetuksen osalta Kustannusosakeyhtiö Otavan Seikkailujen eskari ja Sanoma Pron Esiopetuksen laskutaito, alakoulun osalta 1., 5. ja 6. luokan kirjat kirjasarjoista Kymppi ja Tuhattaituri sekä yläkoulun osalta Sanoma Pron Kuutio 7, Otavan Pii 7 ja Editan Säde 7. Esiopetuksen kirjoista tutkittiin vain painettuja oppikirjoja ja muista sähköisiä versiota painetuista opettajan oppaista. Vain Otavan Pii 7 -kirjasta tutkittiin opettajan digiopetusmateriaalia, mutta oppilaan kirjasta sähköistä versiota painetusta oppikirjasta.

Tutkimuksen toisessa osassa poimittiin oppikirjoista ylös yhtäsuuruuden ja yhtälöiden määritelmät sekä opettajan oppaista näihin liittyneet vinkit opettajille. Lisäksi kirjattiin ylös joitakin tehtäväesimerkkejä, jotka havainnollistivat näiden määritelmien opettamista. Kirjoja tutkittiin kappaleittain opettajan oppaan vinkkien ja toiminnallisten tehtävien tarkastelun kautta. Lisäksi koska kirjat olivat sähköisessä muodossa, pystyttiin hyödyntämään hakutoimintoa, jossa haettiin sekä syksyn että kevään kirjoista kaikki tulokset, jotka sisälsivät sanan osana merkkijonon ”yhtä”. Tämä tuotti tuloksina muun muassa termejä yhtäsuuruus, yhtälö, epäyhtälö, yhtä monta, yhtä suuri, yhtä, yhtään ja yhtäkkiä. Osumat, joiden merkitys meni aiheen ohi, sivuutettiin suoraan ja vain yhtäsuuruuteen viittaavien termien osumat tarkasteltiin lähemmin. Tämän haun avulla pyrittiin varmistamaan, että yhtään yhtäsuuruusmerkin tai yhtäsuuruuden määritelmää ei vahingossa menisi ohi. Samaa menetelmää käytettiin yläkoulun oppikirjoissa, joista kaksi oli vain selaimessa luettavia, mutta hakutoiminto toimi silti. Yläkoulun kirjoissa käytettiin samaa termiä.

Tutkimuksen toisen osan kvalitatiivinen osuus muodostui määritelmien etsimisestä sekä sanojen ”yhtäsuuruus”, ”yhtälö” ja ”on yhtä suuri kuin” sekä näiden eri taivutusmuotojen esiintymiskertojen ja -yhteyksien tarkastelusta. Tämä tarkastelu suoritettiin oppikirjoittain ensin sisällysluettelon avulla ja sitten dokumentinlukijan hakutoimintoa käyttäen. Näiden tulosten raportoinnissa määrät huomioidaan vain sanallisesti esimerkiksi termein enemmän kuin, vähemmän kuin ja yhtä paljon kuin.

5.3.1 Yhtälötehtävien jako kategorioihin

Yläkoulun matematiikan oppikirjojen yhtälötyyppejä ja niiden vaikutusta yhtäsuuruusmerkin oppimiseen tutkineet McNeil et al. (2006) jakoivat yhtälötehtävät kahteen pääkategoriaan: standardit yhtälöt, joissa kaikki operaatiot ovat vasemmalla puolella yhtäsuuruusmerkkiä, ja epästandardit yhtälöt eli kaikki muut yhtälöt. Epästandardien yhtälöiden kategorian he jakoivat edelleen yhtälöihin, joissa on operaatioita kummallakin puolella yhtäsuuruusmerkkiä ja muihin epästandardeihin yhtälöihin. Muut epästandardit yhtälöt he jakoivat vielä lisäksi kolmeen alakategoriaan, a) yhtälöt, joissa operaatiot ovat oikealla puolella yhtälöä, b) yhtälöt, joissa ei ole operaatioita ja c) ei yhtälöä, eli esimerkiksi tehtävät, joissa tulee täydentää vertailuoperaattorit $<, >$ ja $=$. (McNeil et al., 2006)

Myös Li et al. (2008) sekä Powell (2012) tutkivat oppikirjojen yhtälöitä, mutta heidän tutkimusaineistonaan olivat alakoulun kirjat. Kummassakin tutkimuksessa käytettiin pääosin samaa jakoa kuin tutkijat McNeil et al. (2006), mutta pienin muutoksin. Tutkijat Li et al. (2008) käyttivät samaa viittä kategoriaa kuin McNeil et al. (2006), mutta lisäsivät epästandardien yhtälöiden kategorioita vielä neljä: 1) laskut ilman yhtäsuuruusmerkkiä, esimerkiksi $3 + 4$, jossa oppilaat lisäävät vastauksen ja yhtäsuuruusmerkin, 2) nimeä yhtälön osat, 3) operaatiot ja vastaukset yhdistetään viivoin tai nuolin ja 4) yhtälöt, joissa täydennetään kaksi tai useampi puuttuva tekijä. (Li et al., 2008) Powell (2012) käytti tutkimuksessaan myös osittain samaa jakoa kuin McNeil et al. (2006), mutta jakoi yhtälöt tarkemmin peräti 12 kategoriaan. Powell erotti standardimuotoisten yhtälöiden kategoriasta sekä kategoriasta, jonka yhtälöissä operaatiot ovat oikealla puolella, jokaisen laskutoimituksen omaksi kategoriakseen ja lisäsi näille myös kategoriat, joissa laskutoimituksia on useampi. Powell myös jätti pois kategorian ”ei yhtälöä”. (Powell, 2012)

Tämän tutkimuksen yhtälöt jaettiin kategorioihin tutkijoiden McNeil et al. (2006), Li et al. (2008) ja Powell (2012) kategoriajakojen pohjalta. Kuvaan

5.1 on koottu tämä kategoriajako tiivistettynä. Ensin muodostettiin pääkategoriat standardeille ja epästandardeille yhtälöille. Standardien yhtälöiden kategoriaan kuuluvat kaikki muotoa kaikki muotoa $a * b = c$ olevat yhtälöt, missä $*$ on jokin peruslaskutoimitusten operaatioista $+, -, \cdot, :$, sekä pidemmät laskutoimitukset, joissa on useampi operaatio yhtälön vasemmalla puolella. Epästandardien yhtälöiden pääkategoriaan kuuluvat kaikki muut yhtälöt. Tutkimukselle koettiin olennaisena myös sellaiset tehtävät, jotka eivät sisällä lainkaan yhtäsuuruusmerkkiä, mutta joissa yhtäsuuruuden käsite on kuitenkin vahvasti läsnä. Tämä kategoria ei sisällä varsinaisia yhtälöitä, joten se ei sovi standardien eikä epästandardien yhtälöiden pääkategorioihin. Näin ollen sille perustettiin oma pääkategoria: muut yhtäsuuruustehtävät. Tätä valintaa tukee muun muassa tukijoiden McNeil & Alibali (2005a) kehotus tarjota yhtäsuuruudesta mahdollisimman monipuolinen kuva ja haastaa operationaalinen käsitys heti matematiikan opintojen alussa (McNeil & Alibali, 2005a). Myös tutkijat Li et al. (2008) lisäsivät kaksi kategoriaa, jotka eivät sisältäneet varsinaisia yhtälöitä. Tässä tutkimuksessa nuo kaksi kategoriaa on yhdistetty ja lisäksi muiden yhtäsuuruustehtävien kategoriaan sisältyy myös muita tehtävätyyppejä.

Pääkategoriat jaettiin edelleen yläkategorioihin I–V. Yläkategoria I on täysin sama kuin pääkategoria standardit yhtälöt ja yläkategoria V on puolestaan sama kuin pääkategoria muut yhtäsuuruustehtävät. Tutkimustulosten tarkastelun kannalta koettiin tarpeelliseksi selkiyttää kategorioiden nimeäminen ja numerointi siten, että kullakin kategoriatasolla on yhtenäinen nimeämissysteemi. Tämän ansiosta yläkategoriat I–V näkyvät kuvassa 5.1 samalla tasolla. Epästandardien yhtälöiden alle luotiin sen sijaan kolme yläkategoriaa. Näistä yläkategoria II sisältää useammassa tutkimuksessa, muun muassa McNeil et al. (2006), mainitut muotoa $c = a * b$ ja muotoa $a * b = c * d$ olevat yhtälöt. Nämä erotettiin omaksi yläkategoriakseen, jotta niiden esiintymistä oppikirjoissa pystyttäisiin tarkastelemaan paremmin. Powell (2012) erotti tutkimuksessaan myös useamman operaation sisältävät yhtälöt omiksi kategorioikseen, mutta sille ei koettu tässä tutkimuksessa tarvetta, vaan useamman operaation sisältävät yhtälöt on sisällytetty niihin kategorioihin, joissa ne olisivat, jos operaatioita olisi vain yksi. Yläkategoriaan III sisältyvät

Yhtälöt

- **Standardit yhtälöt**
  - **I**
    - $\mathrm{I_a}$: Muotoa $a * b = c$ ja $a * b * c = d$ olevat yhtälöt
    - $\mathrm{I_b}$: Muotoa $\mathrm{I_a}$ olevat yhtälöt, joissa lauseke muodostetaan itse
    - $\mathrm{I_c}$: Muotoa $\mathrm{I_a}$ olevat yhtälöt, joissa tuntematon on yhtälön vasemmalla puolella
- **Epästandardit yhtälöt**
  - **II**
    - $\mathrm{II_a}$: Muotoa $c = a * b$ ja $d = a * b * c$ olevat yhtälöt
    - $\mathrm{II_b}$: Muotoa $a * b = c * d$ olevat yhtälöt
  - **III**
    - $\mathrm{III_a}$: Yhtälöketjut
    - $\mathrm{III_b}$: Mittayksikkömuunnokset
    - $\mathrm{III_c}$: Epäyhtälöt ja vajanaiset yhtälöt
  - **IV**
    - Yhtälöissä kuvia lukujen tilalla
- **Muut yhtäsuuruustehtävät**
  - **V**
    - Ei yhtäsuuruusmerkkiä tai operaatioita

Kuva 5.1: Tehtävien kategoriajako yksinkertaistettuna kaavioksi.

muun muassa yhtälöketjut, mittayksikkömuunnokset ja vertailuoperattorin sisältävät tehtävät. Yläkategoria IV sen sijaan sisältää sellaisia yhtälöitä, joita McNeil et al. (2006), Li et al. (2008) ja Powell (2012) eivät mainitse lainkaan. Kategorian yhtälöissä on nimittäin joidenkin lukujen tilalla kuvia. Yhtälöt saattaisivat ilman kuvia kuulua niin standardien kuin epästandardien yhtälöiden kategorioihin, mutta poikkeavan ulkoasunsa vuoksi ne lukeutuvat tässä tutkimuksessa epästandardeihin yhtälöihin.

Yläkategoriat on jaettu vielä alakategorioihin, jotta voidaan tutkia tarkemmin erilaisia yhtälötyyppejä. Standardiyhtälöiden kategoria I jakautuu kolmeen alakategoriaan. Alakategoriaan $\mathrm{I_a}$ kuuluvat kaikki perusmuotoiset yhtälöt, joissa operaatiot ovat yhtälön vasemmalla puolella. Alakategorian

$\mathrm{I_b}$ muodostavat yhtälöt, joissa laskulauseke muodostetaan itse annettujen vihjeiden tai kuvien pohjalta. Aiempien tutkimusten osalta vain tutkijoiden Li et al. (2008) viimeinen kategoria on muistuttaa tätä. Näissä myös haastetaan oppilas ajattelemaan, miten yhtälö muodostetaan. Alakategorian $\mathrm{I_c}$ muodostavia yhtälöitä, joissa tuntematon on yhtälön vasemmalla puolella, ei aiemmissa tutkimuksissa ole huomioitu. Tämän kategorian tehtävissä kuitenkin joutuu miettimään vastausta syvällisemmin kuin kategorian $\mathrm{I_a}$ tehtävissä ja yhtäsuuruusmerkin ymmärrystä haastetaan, kun kysytty luku ei olekaan yhtäsuuruusmerkin oikealla puolella.

Epästandardien yhtälöiden yläkategoria II on jaettu kahteen osaan. Alakategoriaan $\mathrm{II_a}$ kuuluvat kaikki muotoa $c = a * b$ olevat yhtälöt, joissa siis kaikki operaatiot ovat oikealla puolella. Kategoriaan $\mathrm{II_b}$ kuuluvat muotoa $a * b = c * d$ olevat yhtälöt. Nämä yhtälöt siis sisältävät operaatioita kummallakin puolella yhtälöä. Tässä tutkimuksessa murtoluvut tulkitaan jakolaskuina. Näin esimerkiksi murtolukujen $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ välinen yhtälö tulkitaan muodossa $a : b = c : d$, joka kuuluu siis kategoriaan $\mathrm{II_b}$. Vaikka tutkijat McNeil et al. (2006) päätyivät tutkimuksessaan tulkitsemaan murtoluvut lukuina, valittiin tähän tutkimukseen sama linja kuin Pursiainen & Suontakanen (2016) pro gradu -tutkielmassa. Pursiainen & Suontakanen (2016) perustelivat valintaansa Tuhattaituri-kirjasarjan tavasta rinnastaa murtoluvut ja jakolaskut, mitä ei kuitenkaan kirjasarjan uudemmissa painoksissa tehdä.

Yläkategoria III jakautuu kolmeen alakategoriaan. Kategoriaan $\mathrm{III_a}$ kuuluvat kaikki välivaiheita sisältävät yhtälöt, jotka muodostavat yhtälöketjuja. Näitä ovat esimerkiksi yhtälöt, joissa täydennetään ensin kymmeneksi ja sitten vasta suoritetaan lasku, kuten $8 + 5 = 8 + 2 + 3 = 10 + 3 = 13$. Välivaiheiden tulee kuitenkin olla selkeästi seurausta edellisestä vaiheesta. $\mathrm{III_b}$-kategoriaan kuuluvat mittayksikkömuunnostehtävät, kuten 2 dl = __ ml. $\mathrm{III_c}$-kategoriaan puolestaan kuuluvat tehtävät, joissa täydennetään yhtälöihin niistä puuttuvat vertailuoperaattorit $<, >, =$. Tutkijoiden Hattikudur & Alibali (2010) mukaan yhtäsuuruuden relationaalisuuden ymmärrystä tukee erisuuruuksien opettaminen, minkä vuoksi tämä kategoria koettiin tarpeelliseksi. Myös muut vertailutehtävät, joissa luvut sijoitetaan merkkien molemmin puolin, on laskettu kuuluvaksi tähän kategoriaan, samoin kuin tehtävät, joissa vertailumerkkejä on useampi, kuten $4 < 7 < 9$. Kategoriaan $\mathrm{III_c}$ on sisällytetty myös muotoa $a = a$ olevat yhtälöt.

5.3.2 Kategorioiden prioriteettijärjestys

Yhtälötehtävistä jokainen on sijoitettu vain yhteen kategoriaan aineiston laajuuden vuoksi. Monet tehtävät kuitenkin sisältävät useita erilaisia yhtälöitä, joten yksi tehtävä voisi kuulua useampaan kategoriaan. Tämän vuoksi alakategorioille $\mathrm{I_a}$–$\mathrm{III_c}$ on luotu prioriteettijärjestys, jonka mukaan tehtävät jaetaan soveltuvimpiin kategorioihin. Prioriteettilistasta on jätetty pois kategoriat IV ja V, jotka sijoittuisivat käytännössä ylimmiksi.

1. **IIIa** yhtälöketjut
2. $\mathbf{II_b}$ yhtälöt muotoa $a * b = c * d$
3. $\mathbf{II_a}$ yhtälöt muotoa $c = a * b$
4. $\mathbf{III_c}$ yhtälöt, joissa $<, >$
5. $\mathbf{I_c}$ $a * b = c$, tuntematon vasemmalla
6. $\mathbf{I_b}$ $a * b = c$, lauseke muodostetaan itse
7. $\mathbf{I_a}$ $a * b = c$, tuntematon oikealla
8. $\mathbf{III_b}$ mittayksikkömuunnokset

Kuva 5.2: Yhtälöiden prioriteetit kategorioiden avulla esitettynä.

Prioriteetin 1 yhtälöitä ovat kategorian $\mathrm{III_a}$ yhtälöketjut. Prioriteetin 2 yhtälöitä ovat kategorian $\mathrm{II_b}$ yhtälöt. Jos tehtävässä on yksikin kohta, joka sisältää tätä muotoa olevan yhtälön tai epäyhtälön, sijoittuu se kategoriaan $\mathrm{II_b}$, poissulkien tietenkin tapaukset, jotka kuuluvat prioriteetin 1 kategoriaan. Muut vertailuoperaattoreita $<, >, =$ sisältävät yhtälötehtävät kuuluvat pääsääntöisesti kategoriaan $\mathrm{III_c}$. Prioriteetin 3 yhtälöitä ovat kategorian $\mathrm{II_a}$ yhtälöt. Samoin kuin edellä, jos tehtävässä on yksikin yhtälö tai epäyhtälö, joka on tätä muotoa, sijoittuu se kategoriaan $\mathrm{II_a}$, jollei se sisällä yhtälöä, joka kuuluu prioriteetin 1 tai 2 kategoriaan. Kaikki muut vertailuoperaattoreita sisältävät yhtälötehtävät kuuluvat kategoriaan $\mathrm{III_c}$. Prioriteetin 4 yhtälöt ovat kategorian $\mathrm{III_c}$ yhtälöt, paitsi jos ne sisältävät joitakin edellisten prioriteettitasojen yhtälöitä.

Prioriteetin 5 yhtälöt ovat kategorian $\mathrm{III_b}$ yhtälöt, eli mittayksikkömuunnosyhtälöt, elleivät ne sisällä edellä olevien prioriteettien yhtälöitä. Prioriteetin 6 yhtälöt ovat kategorian $\mathrm{I_c}$ yhtälöt. Prioriteetin 7 yhtälöt ovat kategorian $\mathrm{I_b}$ yhtälöt. Myös yhtälöketjuissa saatetaan tehtävän lauseke muodostaa itse, mutta niissä on useampi yhtäsuuruusmerkki, joten ne kuuluvat kategoriaan $\mathrm{III_a}$. Prioriteetin 8 yhtälöt ovat kategorian $\mathrm{I_a}$ yhtälöt.

Kategoriajaon tehtävät

Tutkimuksen ulkopuolelle on rajattu kaikki oppilaiden kirjoissa ja opettajan oppaissa esiintyvät toiminnalliset tehtävät, pari- ja ryhmätehtävät, pelit ja leikit sekä opettajan oppaiden lisätehtävät. Kappaleiden sisällä olevat vihkotehtävät ja mahdolliset kuplien sisällä olevat arvoitukset on myös jätetty ulkopuolelle. Kaikki laskintehtävät on myös rajattu tutkimuksen ulkopuolelle. Ulkopuolelle on jätetty lisäksi kaikki selvästi aiheen ohi menevät tehtävät. Näihin lukeutuvat muun muassa väritystehtävät, piirtotehtävät, parillisuuteen liittyvät tehtävät, lukujonotehtävät sekä pylväsdiagrammien piirtämiseen tai tulkitsemiseen liittyvät tehtävät, jos ne eivät sisällä selkeitä laskutoimituksia. Näiden lisäksi ulkopuolelle on rajattu tehtävät, joissa etsitään kuvasta esineitä tai merkitään esineiden lukumääriä sekä ongelmanratkaisutehtävät, joita ei ratkaista numeerisesti. Ulkopuolella ovat myös Kymppisarjan ”tarina kuvassa” -tehtävät ja Testataan ja toimitaan -kappaleen tehtävät sekä Tuhattaiturin toimintatuntitehtävät, jotka eivät ole yksilötehtäviä sekä kirjan lopussa olevat projektitehtävät. Toimintatuntitehtävistä on kuitenkin otettu mukaan yksilötehtävät eli koti- ja taituritehtävät. Ulkopuolelle on jätetty myös koodaustehtävät, mutta koodauskappaleiden sisällä olevat normaalit laskutehtävät sen sijaan ovat mukana. Tehtävät, joissa on näkyvillä operaatiot ja joihin pitäisi itse asettaa puuttuvat luvut, mutta vihjeitä ei anneta, on jätetty tutkimuksen ulkopuolelle, mikäli opettajan oppaassa ei ole annettu yhtäkään esimerkkiä tehtävään.

Liitteessä 1 on näkyvissä tehtävien jakautuminen kategorioihin. Tehtävät on laskettu siten, kuten ne kirjassa tehtävänumeroiden perusteella ilmoitetaan. Lukumäärissä ei siis ole huomioitu tehtävien kohtien lukumäärää. Jotkin tehtävät saattavat sisältää peräti 40 yksittäistä laskutoimitusta, kun toiset puolestaan sisältävät vain yhden laskutoimituksen. Tuhattaiturin kotitehtäviä ei ole ensimmäisen luokan kirjoissa numeroitu, mutta ne on laskettu tehtävänantojen mukaan omiksi tehtävikseen. Toisin sanoen, jos kotitehtävälaatikosta löytyy kolme erillistä lihavoitua tehtävänantoa, on nämä tulkittu kolmeksi eri tehtäväksi K1, K2 ja K3. Kympissä Testataan ja toimitaan -kappaleen tehtävät on merkitty kirjaimella T, jos ne kuuluvat otsikon "Testaa ja arvioi" alle, esimerkiksi T1 ja T2. Saman kappaleen viereisen sivun "Pohdi ja oivalla" -otsikon alla olevissa tehtävissä on puolestaan kirjain P edessä. Tuhattaiturin Toimintatunti-kappaleiden varsinaisille tehtäville ei ole annettu mitään koodia, vaan ne ovat vain tehtävänumeroidensa mukaan ja kappaleen kotitehtävät normaalisti etuliitteellä K. Tuhattaiturin tähtipysäkkikappaleissa on tehty samoin. Perustehtävissä on käytetty normaalia numerointia, ja yhden tähden tehtävissä numerointia 1*, kahden tähden tehtävissä 1** ja kolmen tähden tehtävissä 1***. Samassa kappaleessa on alempien luokkien kirjoissa Taitorasti-tehtäviä, joissa on puolestaan käytetty kirjainta R. Kympissä puolestaan R-kirjainta on käytetty Kertausrata-tehtävissä.

Luku 6

Tutkimustulokset

Tässä luvussa esittelen oppikirja-analyysin tuloksia. Tutkimuksen ensimmäinen osa koskee alakoulun matematiikan oppikirjojen yhtälötyyppejä. Käsittelen ensin kuhunkin yhtälökategoriaan sijoittuvia tyypillisiä tehtäviä sekä tehtäviä, jotka eivät yhtä selkeästi kuulu kategoriaan. Sen jälkeen tarkastelen tehtävien jakautumista kategorioihin luokka-asteittain ja kirjasarjoittain. Tutkimuksen toisessa osassa tarkastelen esiopetuksen sekä ala- ja yläkoulun oppikirjojen määritelmiä yhtäsuuruuden ja yhtälöiden osalta. Tarkastelen myös ala- ja yläkoulun oppikirjojen opettajan oppaiden vinkkejä yhtäsuuruuden ja yhtälöiden opetukseen.

6.1 Alakoulun oppikirjojen yhtälökategoriat

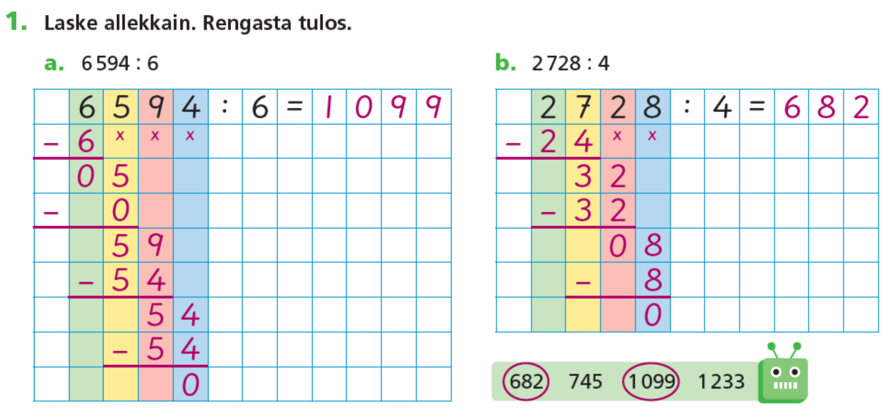
Tutkimuksen ensimmäiseen osaan valikoituivat alakoulun matematiikan oppikirjasarjoista Kustannusosakeyhtiö Otavan Tuhattaituri ja Sanoma Pron Kymppi. Ensiksi tarkastellaan lähemmin tutkimuksen kategoriajaon tehtäviä esimerkkien kautta. Tämän jälkeen siirrytään tutkimuksen tehtävien lukumääriä ja lopuksi perehdytään tehtävien sijoittumista ylä- ja alakategorioihin niin kirjoittain, kirjasarjoittain kuin luokkatasoittain.

6.1.1 Kategorioiden tehtävätyypit

Tutkimuksen oppikirjoissa on havaittavissa tiettyjä toistuvia tehtävätyyppejä. Joka kategoriaan liittyy ainakin yksi selkeä ominaistehtävätyyppi, mutta myös vähemmän selvästi kategoriaan liittyviä tehtäviä sekä tehtäviä, jotka voisi luokitella useampaan kategoriaan. Näihin perehdytään seuraavaksi.

Kategoria I

Kategorian I_a tyypillisin tehtävä on tavallinen yhteen- vähennys-, kerto- tai jakolaskutehtävä. Samassa tehtävässä on yleensä useita laskuja. Erityisesti Kympissä näihin tehtäviin on usein yhdistetty myös sana-arvoitus, jossa jokaisen laskun tulos tuottaa jonkin kirjaimen ja kirjaimista muodostuu lopulta sana. Kategoriaan I_a kuuluvat lisäksi allekkain laskettavat jakolaskut, joissa tehtävänanto on annettu. Näissä tehtävissä yhtälö muodostuu ylimmälle riville muodossa $a : b = c$, kuten kuvassa 6.1. Tällaista tehtävää ei tulkita kategoriaan III_c kuuluvaksi, vaikka laskun sisällä onkin välivaiheita. Yhteen-, vähennys- ja kertolaskujen kohdalla allekkainlaskut kuuluvat kategoriaan V, sillä niissä ei ole yhtäsuuruusmerkkiä.



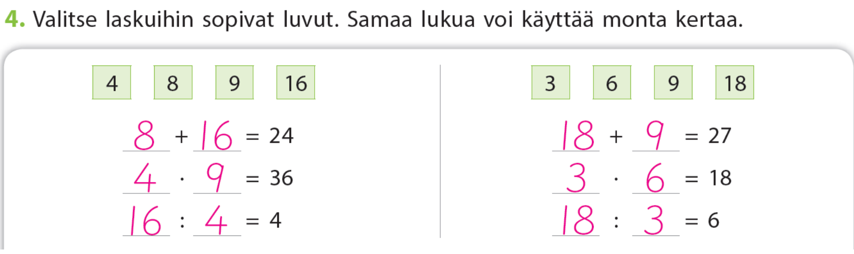
Kuva 6.1: Kategorian I_a allekkain suoritettava jakolasku. Teoksesta Tuhattaituri 5 b opettajan opas, sivu 38.

Kategorialle I_b ovat tyypillisimpiä sanalliset tehtävät sekä varsinkin alempien luokkien kirjoissa kuvien pohjalta muodostettavat laskut, kuten kuvassa

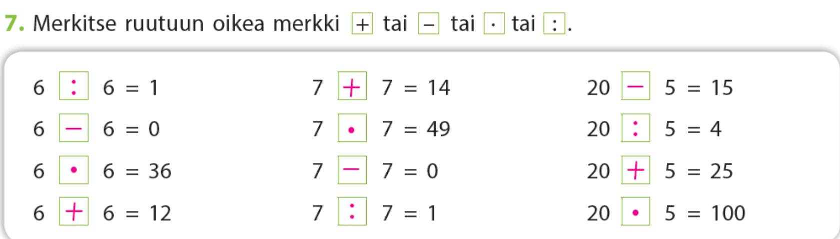
6.2. Jos kuvat vain laskettaisiin eikä niistä tehtäisi laskuja, ei tehtävä kuuluisi tutkimukseen. Kategoriaan I_b kuuluvat myös tehtävät, joissa annetut luvut

Kuva 6.2: Kategorian I_b tyypillinen tehtävä, joka muodostetaan kuvien avulla. Teoksesta Open Kymppi 1 syksy, sivu 54.

tai puuttuvat operaatiot +, − , · ja : , tulee sijoittaa yhtälön vasemmalle puolelle, kuten kuvissa 6.3 ja 6.4. Kuvan 6.3 tehtävässä on mukana kaikki muut laskutoimitukset paitsi vähennyslasku ja tehtävän lukuja voi käyttää useamman kerran. Kuvan 6.3 tehtäviä on kirjoissa jonkin verran, mutta kuvan 6.4 tehtäviä hyvin vähän.



Kuva 6.3: Kategorian I_b tehtävä, jossa täydennetään puuttuvat luvut. Teoksesta Open Kymppi 3 syksy, sivu 98.



Kuva 6.4: Kategorian I_b tehtävä, jossa täydennetään puuttuvat operaatiot. Teoksesta Open Kymppi 3 syksy, sivu 94.

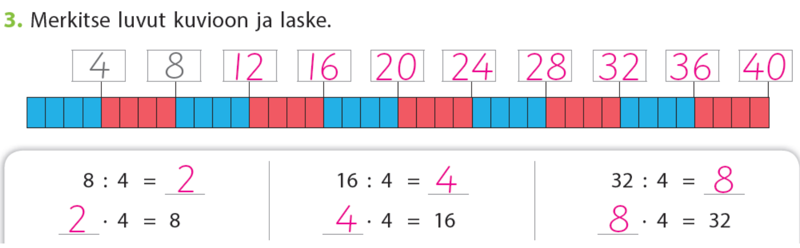
Kategorian I_c yhtälöistä puuttuu yhtälön vasemmalta puolelta jokin luku. Kuvassa 6.5 on esimerkki kategorian I_c tehtävästä, joka on tasoltaan hieman haastavampi, sillä mukana ovat jakojäännökset. Kategoriaan I_c kuulu-


9. **Päättele puuttuva luku.**

a. 10 : 4 = 2, jää 2
b. 35 : 8 = 4, jää 3
c. 29 : 3 = 9, jää 2
d. 23 : 4 = 5, jää 3
e. 48 : 7 = 6, jää 6
f. 79 : 9 = 8, jää 7

Kuva 6.5: Kategorian I_c tyypillinen haastava tehtävä. Teoksesta Tuhattaituri 4a opettajan opas, sivu 125.

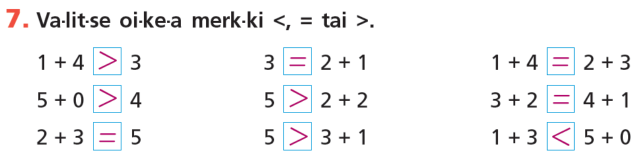
vat myös ne jakolaskut, joiden vastaus pyydetään tarkistamaan kertolaskulla, mutta joita ei muodosteta kokonaan itse. Tällöin kertolaskusta puuttuu tulontekijä, kuten kuvassa 6.6. Lisäksi kategoriaan I_c on laskettu kuuluvaksi yhtälöt, joissa tuntematon x on yhtälön vasemmalla puolella. Näitä ovat esimerkiksi yhtälöt $3 - x = 6$ ja $x + 4 = 7$. Varsinkin Tuhattaiturissa on paljon yhtälönratkaisutehtäviä, joissa x:n arvo ratkaistaan päättelemällä.



Kuva 6.6: Kategorian I_c tehtävä, jossa tarkistetaan jakolasku kertolaskulla. Teoksesta Open Kymppi 3 syksy, sivu 90.

Kategoria II

Kategorian II_a yhtälöitä esiintyy tehtävissä sekä yksinään että yhdessä muiden kategorioiden yhtälöiden kanssa. Kategorioihin II_a ja II_b kuuluvat esimerkiksi kuvan 6.7 kaltaiset tehtävät, joissa sijoitetaan puuttuvat vertailuoperaattorit. Kuvan tehtävä on siitä poikkeuksellinen, että sen yhtälöt kuuluvat peräti neljään eri alakategoriaan. Ensinnäkin tehtävä sisältää muotoa I_a



7. Va·lit·se oi·ke·a merk·ki <, = tai >.

1 + 4 $\boxed{>}$ 3	3 $\boxed{=}$ 2 + 1	1 + 4 $\boxed{=}$ 2 + 3
5 + 0 $\boxed{>}$ 4	5 $\boxed{>}$ 2 + 2	3 + 2 $\boxed{=}$ 4 + 1
2 + 3 $\boxed{=}$ 5	5 $\boxed{>}$ 3 + 1	1 + 3 $\boxed{<}$ 5 + 0

Kuva 6.7: Kategorian $\mathrm{II_b}$ poikkeuksellinen tehtävä. Teoksesta Tuhattaituri 1a opettajan opas, sivu 57.

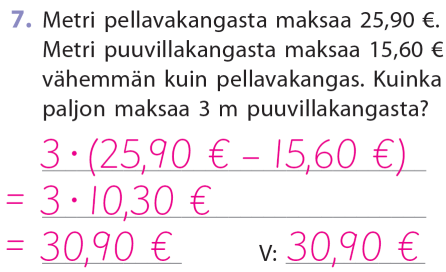
olevan yhtälön $2+3=5$. Toiseksi siinä on kaksi muotoa $\mathrm{III_c}$ olevaa vertailuoperaattorin $>$ sisältävää yhtälöä $1+4>3$ ja $5+0>4$. Kolmanneksi tehtävästä löytyy kolme kategoriaan $\mathrm{II_a}$ kuuluvaa yhtälöä: $3=2+1$, $5>2+2$ ja $5>3+1$ sekä lisäksi kolme kategoriaan $\mathrm{II_b}$ kuuluvaa yhtälöä: $1+4=2+3$, $3+2=4+1$ ja $1+3<5+0$. Yhtälöistä viimeisenä mainitut ovat kuitenkin prioriteettilistalla ylimpänä, joten tehtävä kuuluu kategoriaan $\mathrm{II_b}$.

Murtoluvut tulkitaan laskuoperaatioina, joten kategoriaan $\mathrm{II_b}$ kuuluvat kaikki ne murtolukulaskut, joissa molemmin puolin yhtälöä on murto- tai sekaluku. Tähän kategoriaan kuuluvat siten myös lavennus- ja supistustehtävät, joissa ei ole välivaiheita. Esimerkiksi seuraava laskutoimitus $^{3)}\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$ voidaan tulkita olevan sama kuin $\frac{3}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$. Varsinkin Kympissä suurin osa kategorian $\mathrm{II_b}$ tehtävistä on murtolukulaskuja. Tehtävät, joissa murtoluku muutetaan yhtälöksi, kuten $\frac{1}{2}=0,5$, kuuluvat kategoriaan $\mathrm{I_a}$. Sen sijaan tehtävät, kuten $0,5=\frac{1}{2}$, joissa desimaaliluku muutetaan murtoluvuksi, kuuluvat kategoriaan $\mathrm{II_a}$.

Kategoria III

Kuvassa 6.8 on tyypillinen kategorian $\mathrm{III_a}$ tehtävä. Vaikka tehtävä on sanallinen ja voisi sen vuoksi kuulua kategoriaan $\mathrm{I_b}$, sisältää se yhden välivaiheen. Yhtälöketjut ovat prioriteettilistan ylimpänä, joten tehtävä kuuluu kategoriaan $\mathrm{III_a}$. Yleensä yhtälöketju muodostuu, kun tehtävä sisältää sekä yhteen- tai vähennyslaskun että kerto- tai jakolaskun tai silloin, kun tehtävässä on jossakin kohdassa sulkeet, joiden sisällä oleva lasku ei ratkea helposti päässä.

Kategoriaan $\mathrm{III_a}$ kuuluvat myös tehtävät, joiden välivaihe on vain vastauksen muuttaminen toiseen muotoon, kuten yhtälöketjussa $\frac{2}{10}+\frac{8}{10}=\frac{10}{10}=$



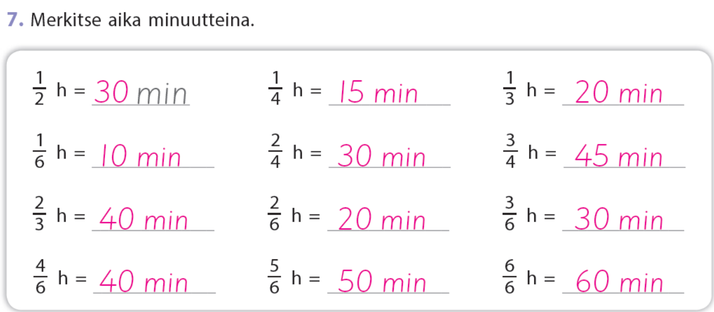
7. Metri pellavakangasta maksaa 25,90 €. Metri puuvillakangasta maksaa 15,60 € vähemmän kuin pellavakangas. Kuinka paljon maksaa 3 m puuvillakangasta?

$3 \cdot (25{,}90\ € - 15{,}60\ €)$
$= 3 \cdot 10{,}30\ €$
$= 30{,}90\ €$ v: $30{,}90\ €$

Kuva 6.8: Kategorian $\mathrm{III_a}$ tyypillinen yhtälöketjutehtävä. Teoksesta Open Kymppi 6 kevät, sivu 100.

1. Joissakin kulmien suuruutta ilmaisevissa tehtävissä laskutoimitus suoritetaan seuraavasti: $\measuredangle A = 180° - 37° = 143°$. Myös pinta-alalaskuja merkitään välillä näin: $A = 3\ \mathrm{cm} \cdot 2\ \mathrm{cm} = 6\ \mathrm{cm}^2$. Vaikka tehtävissä ei ole varsinaisia välivaiheita, on niissä selvä seuraussuhde. Molemmat tapaukset tulkitaan tässä tutkimuksessa yhtälöketjuiksi ja ne kuuluvat siis kategoriaan $\mathrm{III_a}$.

Kategoriaan $\mathrm{III_b}$ kuuluvat kuvan 6.9 kaltaiset yksikkömuunnostehtävät. Kategoriaan lukeutuvat muun muassa tilavuuden, pituuden ja ajan yksiköiden muunnostehtävät. Vaikka murtoluvut tulkitaan tässä tutkimuksessa



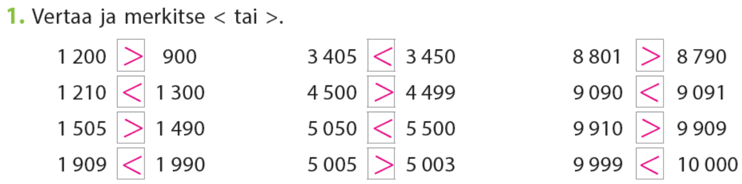
7. Merkitse aika minuutteina.

$\frac{1}{2}$ h = 30 min	$\frac{1}{4}$ h = 15 min	$\frac{1}{3}$ h = 20 min
$\frac{1}{6}$ h = 10 min	$\frac{2}{4}$ h = 30 min	$\frac{3}{4}$ h = 45 min
$\frac{2}{3}$ h = 40 min	$\frac{2}{6}$ h = 20 min	$\frac{3}{6}$ h = 30 min
$\frac{4}{6}$ h = 40 min	$\frac{5}{6}$ h = 50 min	$\frac{6}{6}$ h = 60 min

Kuva 6.9: Kategorian $\mathrm{III_b}$ tyypillinen mittayksikkömuunnostehtävä, jossa murtoluvut tulkitaan lukuina. Teoksesta Open Kymppi 3 kevät, sivu 34.

muuten laskuoperaatioina, tehdään mittayksikkömuunnosten kohdalla poikkeus. Esimerkiksi kuvan 6.9 tehtävä kuuluisi prioriteettilistan mukaan kategoriaan $\mathrm{I_a}$. Tehtävässä kuitenkin mittayksikkömuunnos on pääosassa, joten murtoluvut tulkitaan tällaisissa tehtävissä tavallisina lukuina. Tämän vuoksi tehtävä kuuluu kategoriaan $\mathrm{III_b}$.

Kategorian III_c tehtävät sisältävät yhden tai useamman vertailuoperaattorin. Kuvassa 6.10 on tyypillinen lukujen vertailua sisältävä tehtävä. Muotoa $a = a$ olevia yhtälöitä oli kirjoissa vain pari, joten nämä identtiset yhtälöt sulautettiin osaksi kategoriaa III_c. ”Totta vai ei” -päättelytehtävät, joissa



1. Vertaa ja merkitse < tai >.

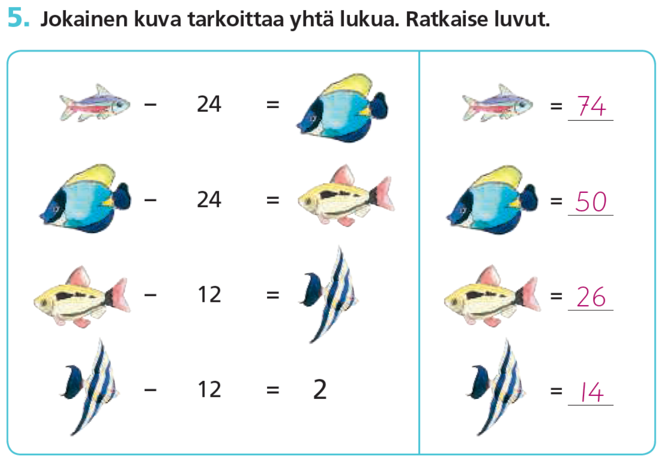
1 200	>	900	3 405	<	3 450	8 801	>	8 790
1 210	<	1 300	4 500	>	4 499	9 090	<	9 091
1 505	>	1 490	5 050	<	5 500	9 910	>	9 909
1 909	<	1 990	5 005	>	5 003	9 999	<	10 000

Kuva 6.10: Kategorian III_c tyypillinen vertailuoperaattoritehtävä. Teoksesta Open Kymppi 3 kevät, sivu 58.

merkitään T, jos väite on totta ja E, jos ei, eivät pääasiassa kuulu tutkimukseen, sillä monet vaativat esimerkiksi taulukon tai diagrammin tulkintaa. Mukaan on kuitenkin otettu väittämät, joissa on yhtälö tai epäyhtälö sellaisenaan, kuten $2 = 3$ tai $48h > 5d$. Tällaisia yhtälöitä tai epäyhtälöitä sisältävät väittämätehtävät kuuluvat kategoriaan III_c, vaikka ne sisältäisivät yksikkömuunnoksia. Toisena ryhmänä tutkimukseen kuuluvat tehtävät, joiden väitteet ovat hyvin lähellä yhtälöitä, kuten väitteessä: ”50 % luvusta 20 on 10.” Nämä tehtävät kuuluvat kuitenkin kategoriaan V, sillä yhtälöt eivät ole näkyvissä.

Kategoria IV

Kategorian IV yhtälötehtävät ovat erilaisia kuin muissa kategorioissa. Näissä yhtälöissä on kaikissa yhtäsuuruusmerkki ja operaatiot, mutta joidenkin tai kaikkien lukujen tilalla on kuvia. Näitä tehtäviä on molemmissa oppikirjasarjoissa jo 1. luokan syksyn kirjoissa. Tyypillinen kategorian IV tehtävä on kuvan 6.11 kaltainen. Tässä tehtävässä kukin kala vastaa jotakin tuntematonta lukua, jonka arvo selvitetään muiden yhtälöiden kautta. Itse asiassa kuvan 6.11 tehtävissä ratkaistaan yhtälöryhmiä. Kuvan tehtävän voisi esittää



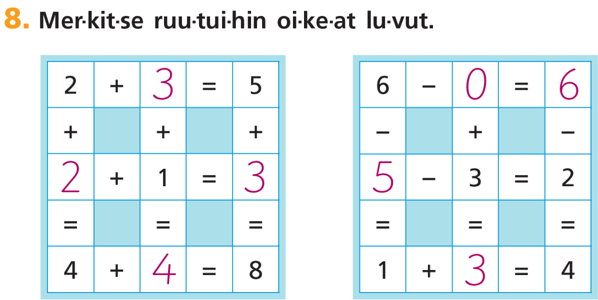
Kuva 6.11: Kategorian IV tyypillinen tehtävä, jossa osa luvuista on korvattu kuvin. Teoksesta Tuhattaituri 2b opettajan opas, sivu 92.

myös tehtävänannolla: ”Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} a - 24 = b \\ b - 24 = c \\ c - 12 = d \\ d - 12 = 2.\text{”} \end{cases}$$

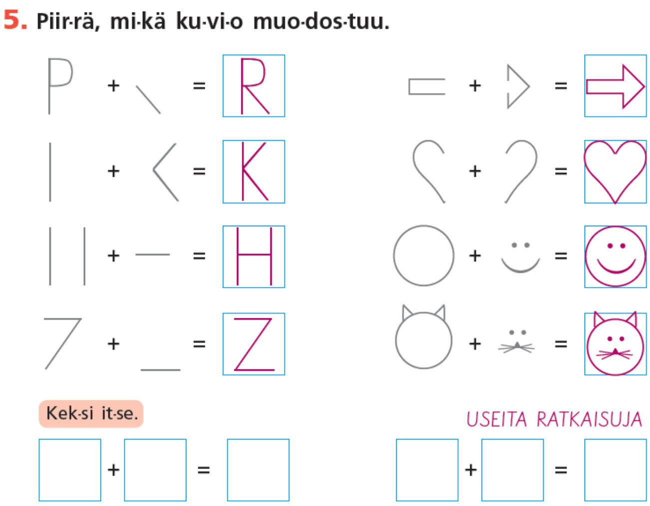
Kategoriaan IV kuuluu myös tehtäviä, jotka kuuluvat selvästi tutkimukseen, mutta eivät sovi muihin kategorioihin. Tällainen on esimerkiksi kuvan 6.12 tehtävä, jossa on useampi toisiinsa liittyvä yhtälö. Yhtälöt tulee ratkaista selvittämällä puuttuvat luvut. Tässä tehtävässä ratkaistaan myös yhtälöryhmää, vaikka osa yhtälöistä ratkeaa suoraan. Ensimmäisen ruudukon yhtälöt voisi ilmaista myös seuraavasti: $2 + x = 5$, $5 + x = 8$, $2 + y = 4$, $y + 1 = x$, $x + 1 = z$ ja $4 + z = 8$.

Kategoria IV sisältää myös muutaman sellaisen tehtävän, jossa ei ole lainkaan lukuja. Nämä tehtävät ovat kuitenkin sen verran poikkeuksellisia, että ne on hyvä mainita erikseen. Kuvan 6.13 tehtävässä on käytetty vain yhteenlaskua, mutta toisissa samanlaisissa tehtävissä on käytetty myös vähennys-



Kuva 6.12: Kategorian IV poikkeuksellinen tehtävä, jossa ratkaistaan kerralla useampi yhtälö. Teoksesta Tuhattaituri 1a opettajan opas, sivu 125.

laskua. Näissä tehtävissä oppilas joutuu soveltamaan oppimaansa tietoa eri tavalla kuin muissa tehtävissä.

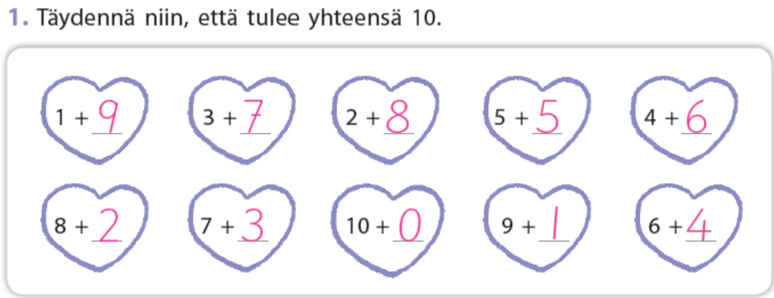


Kuva 6.13: Kategorian IV yhtälötehtävä. Teoksesta Tuhattaituri 6a opettajan opas, sivu 101.

Kategoria V

Lähes kaikista kategorian V tehtävistä puuttuu yhtäsuuruusmerkki =. Toisin sanoen kategoriaan V kuuluvat tehtävät eivät pääosin sisällä yhtälöitä. Ne sisältävät kuitenkin yhtäsuuruuden käsitteen jossakin muodossa. Varsinkin

1. ja 2. luokan oppikirjoille ovat tyypillisiä kuvan 6.14 kaltaiset hajotelmatehtävät. Näitä on erityisen paljon kappaleissa, joissa opetellaan luvut 3–10, mutta myös myöhemmissä kappaleissa suuremmilla luvuilla.

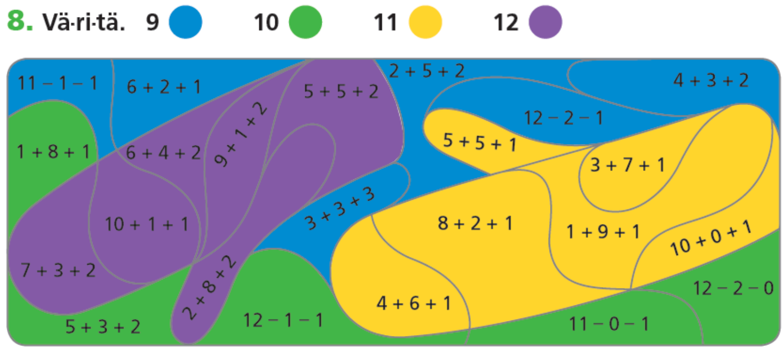


Kuva 6.14: Kategorian V tyypillinen hajotelmatehtävä. Teoksesta Open kymppi 2 syksy, sivu 28.

Kuten jo edellä mainittiin, kategoriaan V kuuluvat lähes kaikki allekainlaskut. Kuvan 6.15 kaltaiset rahatehtävät kuuluvat myös kategoriaan V. Tässä kysytään kuvan rahamäärää, mutta vastaukseen ei riitä pelkkä rahojen lukumäärä, vaan rahojen arvot tulee myös ottaa huomioon. Ensimmäisessä kohdassa siis lasketaan lasku $10 + 5 + 1 = 16$. Samoin kategoriaan V kuuluvat tehtävät, joissa piirretään jokin rahamäärä. Muut piirrostehtävät sen sijaan eivät kuulu tutkimukseen.

Kuva 6.15: Kategorian V tehtävä, jossa lasketaan rahat yhteen. Teoksesta Open kymppi 1 kevät, sivu 36.

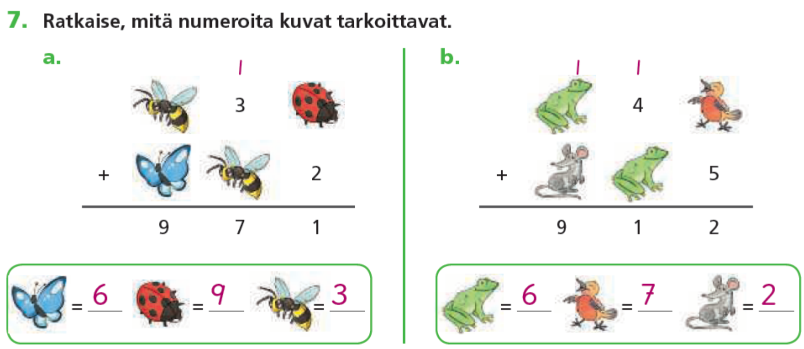
Monissa kategorian V tehtävissä etsitään jollekin luvulle sopivat laskutoimitukset, kuten kuvan 6.16 tehtävässä. Etenkin Tuhattaiturissa on paljon tällaisia tehtäviä. Tässä tehtävässä lausekkeet tulee värittää niiden vas-



Kuva 6.16: Kategorian V yhteenlaskutehtävä, jossa väritetään sopivat laskutoimitukset. Teoksesta Tuhattaituri 1b opettajan opas, sivu 12.

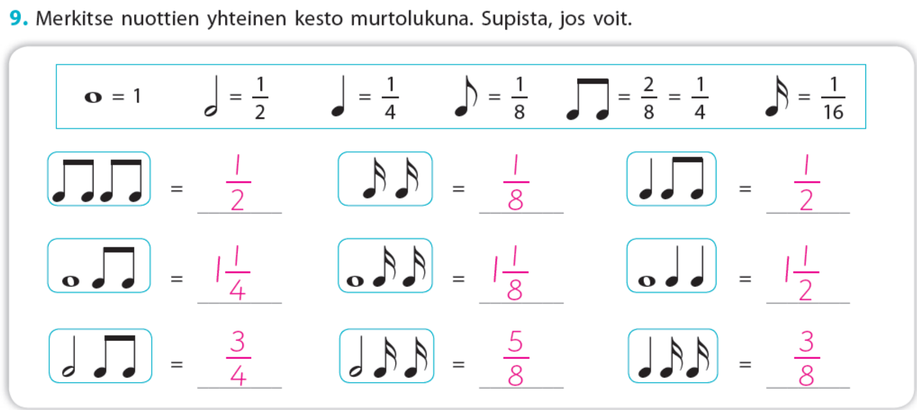
tausten mukaisilla väreillä ja väritetyistä alueista muodostuu kuva. Lauseke saatetaan myös yhdistää vastaukseen esimerkiksi viivalla, jolloin vastaus voi löytyä myös lukusuoralta, vaikka lukusuoratehtävät eivät muuten kuulu tutkimukseen. Lausekkeiden joukossa voi olla myös vääriä vastauksia.

Kategoriaan V kuuluu myös kategorian IV kaltaisia tehtäviä, jotka eivät kuitenkaan sisällä yhtäsuuruusmerkkiä, kuten kuvan 6.17 tehtävä tai operaatioita +, − , · , :, kuten kuvan 6.18 tehtävä. Kuvan 6.17 tehtävässä leppäkerttu, perhonen ja ampiainen vastaavat kukin joitakin lukuja. Allekkain laskettava yhteenlasku ei kuitenkaan sisällä yhtäsuuruusmerkkiä, joten tehtävä kuuluu kategorian IV sijaan kategoriaan V. Kuvan 6.18 tehtävästä



Kuva 6.17: Kategorian V tehtävä, jossa ei ole yhtäsuuruusmerkkiä Teoksesta Tuhattaituri 3a opettajan opas, sivu 29.

sen sijaan puuttuvat +-merkit. Kirjoissa on vain pari tällaista nuottiarvotehtävää. Jokainen nuottiarvo vastaa jotakin murtolukua, esimerkiksi kokonuotti vastaa lukua 1, puolinuotti murtolukua $\frac{1}{2}$, neljäsosanuotti lukua $\frac{1}{4}$ ja niin edelleen. Tehtävässä lasketaan nuottiarvot yhteen ja merkitään niiden yhteiskesto murtolukuna.



Kuva 6.18: Kategorian V tehtävä, jossa on yhtäsuuruusmerkki, mutta ei operaatioita. Teoksesta Open kymppi 6 kevät, sivu 34.

6.1.2 Tutkimukseen sisältyvien tehtävien määrät

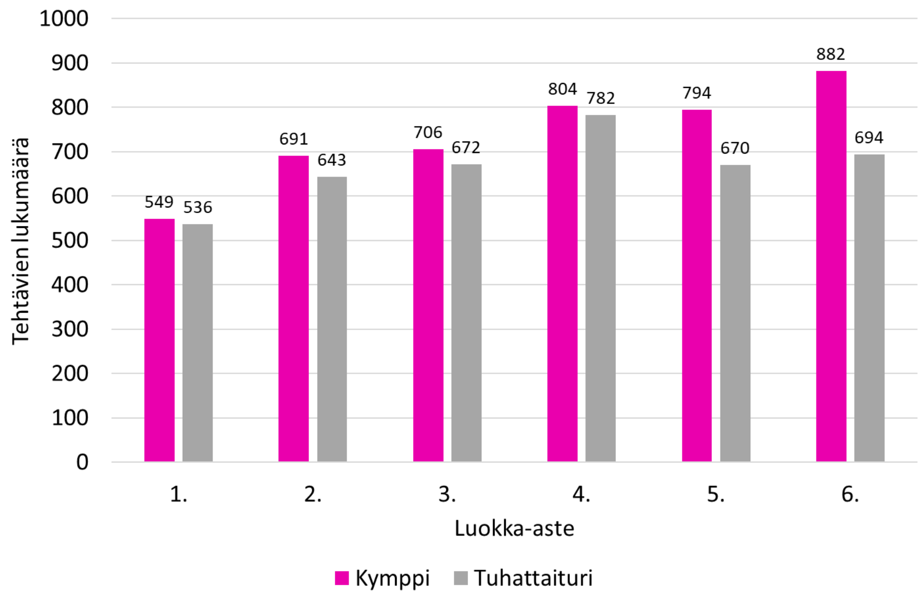
Oppikirjojen kaikkien tehtävien kokonaismäärää on vaikea arvioida, sillä kirjoissa on myös tehtäviä, joissa ei ole tehtävänumeroita sekä muun muassa toiminnallisia tehtäviä. Tätä tutkimusta varten tehtävien kokonaismäärä on selvitetty laskemalla yhteen kirjojen yksilötehtävät. Kummankin oppikirjasarjan tehtävien kokonaismäärät sekä tutkimukseen valikoituneiden tehtävien määrät on kerätty taulukkoon 6.1. Kaiken kaikkiaan tutkimuksen kategorioihin soveltuvia yhtälötehtäviä on 8423 kappaletta, mikä on kaikista kirjojen tehtävistä noin kaksi kolmasosaa. Kympissä on tutkimukseen soveltuvia tehtäviä noin 10 % enemmän kuin Tuhattaiturissa.

Tutkimuksen kategoriajakoon soveltuvien tehtävien lukumääriä on havainnollistettu luokka-asteittain kuvan 6.19 pylväskaavioon. Kympissä on joka vuositasolla enemmän tutkimuksen kategoriajakoon soveltuvia tehtäviä kuin Tuhattaiturissa. Tehtävämäärissä on myös havaittavissa kasvua luokka-

Taulukko 6.1: Kymppi- ja Tuhattaituri-kirjasarjojen arvioidut kokonaistehtävämäärät sekä tutkimukseen sisältyneiden tehtävien määrät.

Kirjasarja	Tehtäviä yhteensä	Tehtäviä tutkimukseen
Kymppi	6408	4426
Tuhattaituri	6198	3997

tasojen edetessä. Kummassakin kirjasarjassa on vähiten tutkimukseen soveltuvia tehtäviä 1. luokan oppikirjoissa. Kympissä on eniten tehtäviä 6. luokan kirjoissa ja Tuhattaiturissa 4. luokan kirjoissa. Suurimmat erot tehtävämäärissä ovat kirjasarjojen välillä viimeisillä luokilla. Kympin 5. luokan kirjoissa on 124 tehtävää enemmän ja 6. luokan kirjoissa peräti 188 tehtävää enemmän kuin Tuhattaiturissa. Pienin ero on puolestaan 1. luokan kirjoissa.



Kuva 6.19: Tutkimukseen soveltuvat tehtävät vuositasoittain kirjoissa Kymppi ja Tuhattaituri.

Taulukkoon 6.2 on kerätty kaikki tutkimukseen sisältyvät tehtävät kirjoittain. Pienin ero kirjasarjojen välillä on 1. luokan syksyn oppikirjoissa. Suurin ero on 5. luokan kevään kirjoissa, joista Kympissä on peräti 168 tehtävää enemmän kuin Tuhattaiturissa. Myös 6. luokan kirjoissa on lähes sadan tehtävän erot Kympin hyväksi. Eniten tutkimukseen soveltuvia tehtäviä on Kymppi 5 kevät -kirjassa ja vähiten puolestaan Tuhattaituri 1a -kirjassa. Kympissä on enemmän tehtäviä peräti yhdeksässä kirjassa, mutta Tuhattaiturissa vain 2. luokan kevään, 4. luokan syksyn sekä 5. luokan syksyn kirjoissa.

Taulukko 6.2: Kymppi- ja Tuhattaituri-kirjojen tutkimuksen kategorioihin soveltuvat tehtävät kirjoittain.

Kirja	1s	1k	2s	2k	3s	3k	4s	4k	5s	5k	6s	6k
Kymppi	255	294	366	325	388	318	334	470	309	485	415	467
Tuhattaituri	254	282	312	331	361	311	376	406	353	317	326	368

Syksyn ja kevään kirjojen välillä on myös eroja tehtävämäärissä. Kymppisarjassa on tutkimuksen kategoriajakoon sopivia tehtäviä enemmän kevään kirjoissa luokka-asteilla 1, 4, 5 ja 6 ja Tuhattaiturissa luokka-asteilla 1, 2, 4 ja 6. Kymppi-sarjassa suurin ero kevään ja syksyn kirjojen välillä on 5. luokan kirjoissa, joista kevään kirjassa on 176 tehtävää enemmän. Tuhattaiturissa suurin ero on 3. luokan kirjoissa, joista syksyn kirjassa on 48 tehtävää enemmän. Pienimmät erot ovat Kympissä 1. luokan kirjoissa ja Tuhattaiturissa 2. luokan kirjoissa.

6.1.3 Tehtävien sijoittuminen yläkategorioihin

Tässä alaluvussa tarkastellaan tehtävien sijoittumista yläkategorioihin kirjasarjoittain, luokka-asteittain ja kirjoittain. Tutkimuksessa kaksi ensimmäistä ominaisuutta on erotettu omiksi tutkimuskysymyksikseen, mutta niitä on myös loogista tarkastella yhdessä. Kirjasarjoja tarkastellaan kokonaisuutena kaikki luokkatasojen kirjat yhdessä. Luokka-asteittaisessa osuudessa käsitellään sekä vuositasojen että kirjasarjojen välisiä eroja. Kun kategoriajakoja tarkastellaan kirjoittain, tutkitaan yhtä kirjasarjaa kerrallaan.

Tehtävien sijoittuminen yläkategorioihin kirjasarjoittain

Taulukkoon 6.3 on koottu Tuhattaiturin ja Kympin tutkimuksen kategoriajakoon soveltuvien tehtävien lukumäärät sekä niiden osuudet prosentteina. Oppikirjojen vertailu on tehty tarkastelemalla pääasiassa tehtävien osuuksia, sillä Kympissä on hieman enemmän kategorioihin soveltuvia tehtäviä. Yläkategorian I tehtäviä on kummassakin oppikirjassa eniten, mikä vahvistaa hypoteesin. Kympissä näiden tehtävien osuus on peräti 48,8 % ja Tuhattaiturissa 36,2 %. Yläkategoria IV on puolestaan molemmissa kirjoissa pienin. Myös kategorian II tehtäviä on melko vähän, Kympissä vain 2,6 %, mutta Tuhattaiturissa 7,4 %.

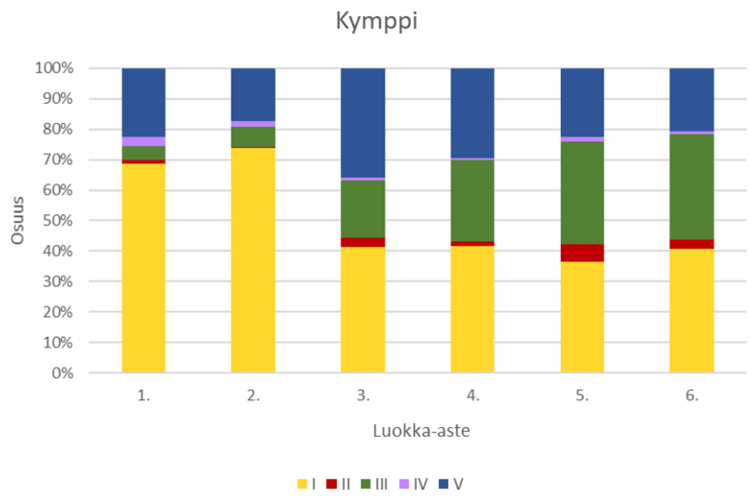
Taulukko 6.3: Kymppi- ja Tuhattaituri-kirjasarjojen yhtälötehtävien kokonaismäärät sekä prosenttiosuudet kategorioissa I–V.

	Kymppi		Tuhattaituri	
Kategoria	Määrä	Osuus (%)	Määrä	Osuus (%)
I	2161	48,8	1446	36,2
II	116	2,6	297	7,4
III	993	22,4	847	21,2
IV	60	1,4	137	3,4
V	1096	24,8	1270	31,8
Yhteensä	4426	100	4019	100

Yläkategoria V on molemmissa oppikirjasarjoissa toiseksi suurin. Kympin tehtävistä noin neljäsosa ja Tuhattaiturin tehtävistä lähes kolmasosa kuuluu tähän kategoriaan. Tutkimuksen pääpaino on yläkategorioiden I–V tarkastelussa, mutta myös alakategorioissa on mielenkiintoisia eroja oppikirjasarjojen välillä. Ennen kuin päästään tarkastelemaan alakategorioita, tutkitaan tarkemmin tehtävien jakautumista yläkategorioihin niin luokka-asteittain kuin kirjoittain.

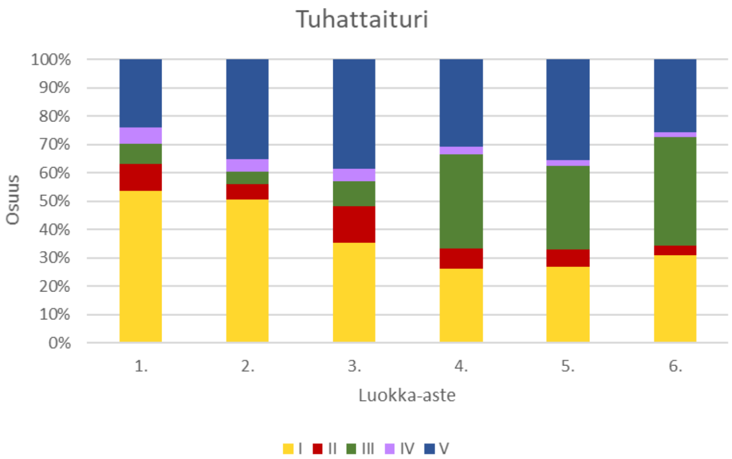
Tehtävien sijoittuminen yläkategorioihin luokka-asteittain

Seuraavaksi tarkastellaan tehtävien sijoittumista kategorioihin I–V luokka-asteiden mukaan. Kunkin vuositason tehtävämäärät on laskettu kirjasarjoittain yhteen ja näiden osuudet laskettu ja kerätty pinottuun pylväskaavioon.



Kuva 6.20: Tehtävien jakautuminen kategorioihin 1. luokan matematiikan oppikirjoissa Kymppi.

Kympissä yläkategoria I on suurin joka luokka-asteella. Lisäksi ensimmäisen ja toisen luokan oppikirjoissa on yläkategorian I tehtäviä huomattavasti enemmän kuin muissa kirjoissa, 1. luokan kirjoissa 68,7 % ja 2. luokan oppikirjoissa jopa 73,8 %. Toisen ja kolmannen luokan kirjoissa on kuitenkin suuri ero osuuksissa. Yläkategoriat II ja IV ovat kaikissa kirjoissa pienimmät ja 1. luokan kirjoissa yläkategorioiden II, III ja IV yhteisosuus on alle 10 %. Yläkategoria II on pienimmillään 2. luokan kirjoissa, joissa siihen kuuluu vain 2 tehtävää eli 0,3 %. Suurimmillaan yläkategoria II on 5. luokan kirjoissa, joissa tehtäviä on 46 eli 5,8 %. Yläkategorian III osuus on myös suurimmillaan 5. luokan kirjoissa, jossa sen osuus on 33,5 %. Pienimmillään kategoria on 4. luokan kirjoissa, vain 0,4 %. Kategoria V on toiseksi suurin 1.–4. luokan oppikirjoissa. Suurimmillaan sen osuus on 3. luokan oppikirjoissa 36,0 % ja pienimmillään 2. luokan oppikirjoissa, 17,2 %. Vaikka kategorioiden osuudet eivät 3.–6. luokan kirjoissa pysy samoina, on niissä kuitenkin havaittavissa samankaltaisuuksia.

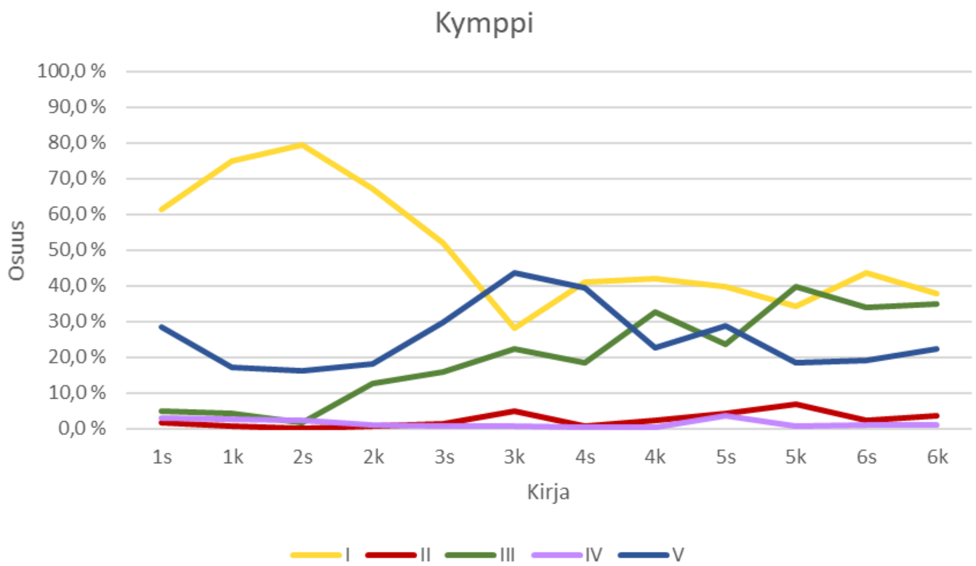


Kuva 6.21: Tehtävien jakautuminen kategorioihin Tuhattaituri.

Tuhattaiturissa yläkategoria I on suurin vain 1. ja 2. luokan oppikirjoissa. Sen osuus on suurimmillaan 1. luokan kirjoissa 53,5 % ja pienimmillään 4. luokan oppikirjoissa vain 26,1 %. Kategoria V on suurin 3. ja 5. luokka-asteen kirjoissa, ja sen osuus vaihtelee kirjoissa välillä 24,1–38,5 %. Yläkategoria III on suurin 4. ja 6. luokan oppikirjoissa ja sen osuudet vaihtelevat 2. luokan 4,4 prosentista 4. luokan 33,1 prosenttiin. Osuudet ovat kuitenkin suunnilleen samankokoisia 1.–3. luokkien välillä sekä 4.–6. luokkien välillä. Yläkategoria II on Kympistä poiketen kahdella luokka-asteella jopa kolmanneksi suurin kategoria. Suurimmillaan sen osuus on 3. luokan oppikirjoissa 13,1 % ja pienimmillään 6. luokan kirjoissa, jossa tehtäviä on 24 eli 3,5 %. Kategoria IV on Tuhattaiturin pienin kategoria ja sen osuudet vaihtelevat välillä 1,6–5,8 %.

Tehtävien sijoittuminen yläkategorioihin kirjoittain

Edellä käsiteltiin tehtävien sijoittuminen yläkategorioihin kirjasarjoittain ja luokka-asteittain. Seuraavaksi tarkastellaan näitä vielä kirjoittain. Kuvaan 6.22 on koottu Kympin tehtävien sijoittuminen yläkategorioihin kussakin syksyn ja kevään oppikirjassa. Varsinkin yläkategoriassa I on huomattavan suurta vaihtelua. Suurimmillaan osuus on 2. luokan syksyn kirjassa, jossa tehtäviä on peräti 79,5 %. Tästä prosenttiosuudet pienenevät vuositasoittain, ja 3. luokan kevään kirjassa osuus on enää 28,3 %. Lopuissa kirjoissa osuudet ovat 40 % tietämillä. Yläkategorioiden II ja IV osuudet ovat joka kirjassa alle 7 %. Suurimmillaan kategoria II on 5. luokan kevään kirjassa, jossa osuus on 6,8 %. Kymppi 2 syksy -kirjassa ei sen sijaan ole ainoatakaan yläkategorian II tehtävää. Kategoria IV on puolestaan suurimmillaan 5. luokan syksyn kirjassa, jossa osuus 3,6 % ja pienimmillään 4. luokan syksyn kirjassa, jossa osuus on vain 0,3 %. 2. luokan syksyn kirjassa kategoria IV on kolmanneksi suurin, vaikka sen osuus on vain 2,5 %. Yläkategorian III osuus

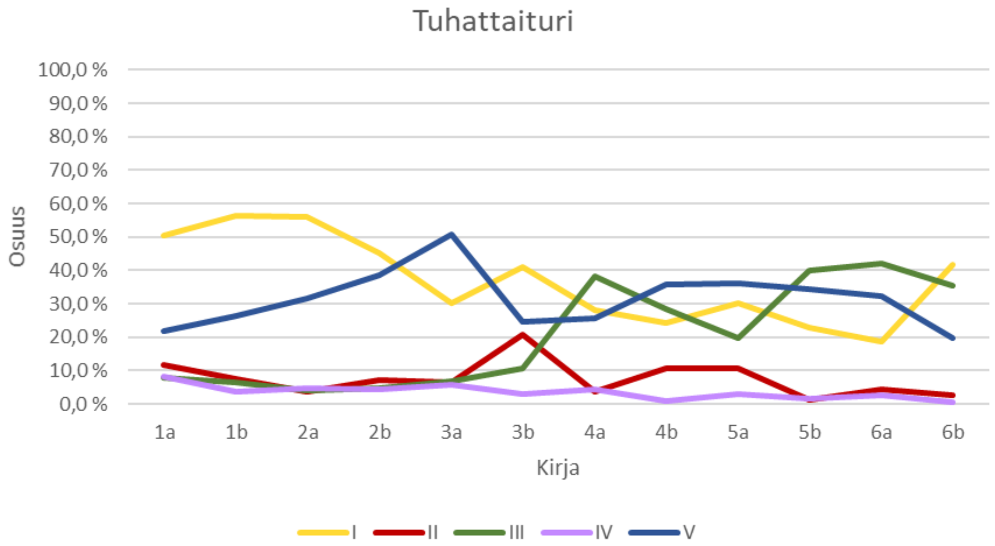


Kuva 6.22: Tehtävien jakautuminen yläkategorioihin Kymppi-sarjan oppikirjoissa.

kasvaa Kympissä jonkin verran vuositasojen edetessä. Pienimmillään se on 2. luokan syksyn kirjassa, jossa osuus on 1,6 %. Suurimmillaan yläkategoria III on 5. luokan kevään kirjassa, jossa sen osuus on 39,8 %, mikä tekee siitä myös kirjan suurimman kategorian. Kategorian V osuus on pienimmillään 2. luokan syksyn kirjassa, 16,4 %. Osuus kuitenkin kasvaa 3. luokan kirjoissa ja on suurimmillaan Kympin 3. luokan kevään kirjassa, jossa se on myös suurin kategoria 43,7 % osuudellaan.

Tuhattaiturin tehtävien jakautuminen yläkategorioihin syksyn ja kevään oppikirjoissa on koottu kuvaan 6.23. Yläkategorian I osuus on suurimmillaan

56,4 % 1. luokan kevään kirjassa ja pienimmillään 16,8 % 6. luokan syksyn kirjassa. Käyrässä on kolme huippua, joissa osuudet ovat ympäröiviä osuuksia suurempia. Näistä ensimmäinen on 3. luokan kevään kirjan kohdalla, jossa osuus on 41,2 %, kun ympäröivissä kirjoissa osuus on vain noin 30 %. Lisäksi Tuhattaituri 5a -kirjassa on pieni huippu ja erittäin suuri puolestaan Tuhattaituri 6b -kirjassa. Jälkimmäisessä hyppäys 6. luokan syksyn 18,7 prosentista kevään kirjan 41,6 prosenttiin on yli 20 prosenttiyksikön suuruinen. Yläkategoriassa II on huomattavasti suurempaa vaihtelua kuin Kymppi-kirjoissa. Sen osuus on neljässä kirjassa yli 10 prosenttia: 1., 4. ja 5. luokan syksyn sekä 3. luokan kevään kirjoissa. Näistä viimeisenä mainitussa kategorian osuus on suurin, peräti 20,9 %. Pienimmillään kategorian II osuus on vain 1,3 % Tuhattaituri 5b -kirjassa. Kategorian IV osuudet vaihtelevat 1. luokan syksyn 8,3 prosentista 6. luokan kevään 0,5 prosenttiin. Myös Tuhattaiturissa kategorian III osuus kasvaa vuositasojen edetessä jonkin verran, tosin 4. luokan kevään ja 5. luokan syksyn kirjojen osuuksissa tapahtuu notkahdus. Osuudet ovat välillä 4,2–42,0 %. Kategorian V osuus on puolestaan suurimmillaan peräti 50,7 % 3. luokan syksyn kirjassa ja pienimmillään 19,8 % 6. luokan kevään kirjassa.



Kuva 6.23: Tehtävien jakautuminen yläkategorioihin Tuhattaituri-sarjan oppikirjoissa.

6.1.4 Tehtävien sijoittuminen alakategorioihin

Kun oppikirjoja tarkastellaan luokkatasoittain kokonaisuutena, voi jäädä huomaamatta yksittäisten kirjojen suuretkin erot, mikä edellisen alaluvun lopussa kävi ilmi. Seuraavaksi oppikirjoja tarkastellaan alakategoriatasolla ensin kirjoittain ja sitten yleisemmin kirjasarjoittain.

Tehtävien sijoittuminen alakategorioihin kirjoittain

Kymppi-kirjasarjassa alakategoriaan I_a kuuluu puolet yläkategorian I tehtävistä, joita on eniten 1. luokan kevään kirjassa ja vähiten 6. luokan kevään kirjassa. Kategorian I_b tehtäviä on eniten 2. luokan syksyn kirjassa ja vähiten 3. luokan kevään kirjassa. Alakategoriaan I_c kuuluu vain noin 5 % yläkategorian I tehtävistä, joita on eniten 1. luokan syksyn kirjassa. Sen sijaan 1. luokan kevään kirjassa tämän kategorian tehtäviä ei ole lainkaan. Alakategoriaan II_a kuuluu yhteensä vain 3 tehtävää, jotka löytyvät 1. ja 2. luokan kirjoista. Kategorian II_b tehtäviä on 1. ja 2. luokan kirjoissa hyvin vähän, mutta enemmän myöhempien luokka-asteiden kirjoissa.

Taulukko 6.4: Kymppi-kirjasarjan yhtälötehtävien sijoittuminen alakategorioihin.

Kirja	$\mathbf{I_a}$	$\mathbf{I_b}$	$\mathbf{I_c}$	$\mathbf{II_a}$	$\mathbf{II_b}$	$\mathbf{III_a}$	$\mathbf{III_b}$	$\mathbf{III_c}$	**IV**	**V**
Kym 1s	70	62	25	2	2	0	0	13	8	73
Kym 1k	166	54	0	0	2	0	0	13	8	51
Kym 2s	147	137	7	0	0	0	0	6	9	60
Kym 2k	108	105	6	1	1	12	23	6	4	59
Kym 3s	89	90	23	0	6	62	0	0	3	115
Kym 3k	57	23	10	0	16	43	14	14	2	139
Kym 4s	87	48	2	0	2	57	0	5	1	132
Kym 4k	83	108	6	0	11	119	29	6	2	106
Kym 5s	67	55	1	0	13	73	0	0	11	89
Kym 5k	64	83	20	0	33	149	40	4	3	89
Kym 6s	95	83	3	0	10	124	14	3	4	79
Kym 6k	49	125	3	0	17	148	11	5	4	105
Yhteensä	1082	973	106	3	113	787	131	75	60	1096

Alakategoriaan III_a kuuluu noin 79 % yläkategorian III tehtävistä, mikä on selkeä enemmistö. Alakategorioiden III_a ja III_b tehtäviä ei ole lainkaan 1. luokan oppikirjoissa eikä 2. luokan syksyn oppikirjoissa. Lisäksi kategorian III_b tehtäviä ei ole myöskään 3., 4. ja 5. luokan syksyn kirjoissa. Molempien kategorioiden tehtäviä on eniten Kymppi 5 kevät -kirjassa. Kolmasosa alakategorian III_c tehtävistä on 1. luokan kirjoissa, mutta 3. ja 5. luokan syksyn kirjoissa näitä ei ole yhtään. Kategorian IV tehtäviä on jokaisessa kirjassa vähintään yksi ja eniten niitä on 5. luokan syksyn kirjassa. Kategorian V tehtäviä on puolestaan eniten 3. luokan kevään kirjassa.

Tuhattaituri-kirjasarjassa yläkategorian I tehtävät jakautuvat alakategorioihin I_a ja I_b melko tasaisesti. Alakategorian I_a tehtäviä on eniten 1. luokan kevään kirjassa ja vähiten 6. luokan kevään kirjassa. Tehtävämäärät vähenevät luokka-asteiden edetessä, joskaan eivät tasaisesti. Alakategorian I_b tehtäviä on eniten 6. luokan kevään ja vähiten 6. luokan syksyn kirjassa. Alakategorian I_c tehtäviä on eniten 6. luokan ja vähiten 5. luokan kevään kirjassa. Alakategoriaan II_b kuuluu noin 73 % yläkategorian II tehtävistä. Sekä II_a että II_b -alakategorioiden tehtäviä löytyy jokaisesta kirjasta vähintään yksi. Eniten alakategorian II_b tehtäviä on 3. luokan kevään kirjassa ja alakategorian II_a tehtäviä 1. luokan syksyn kirjassa.

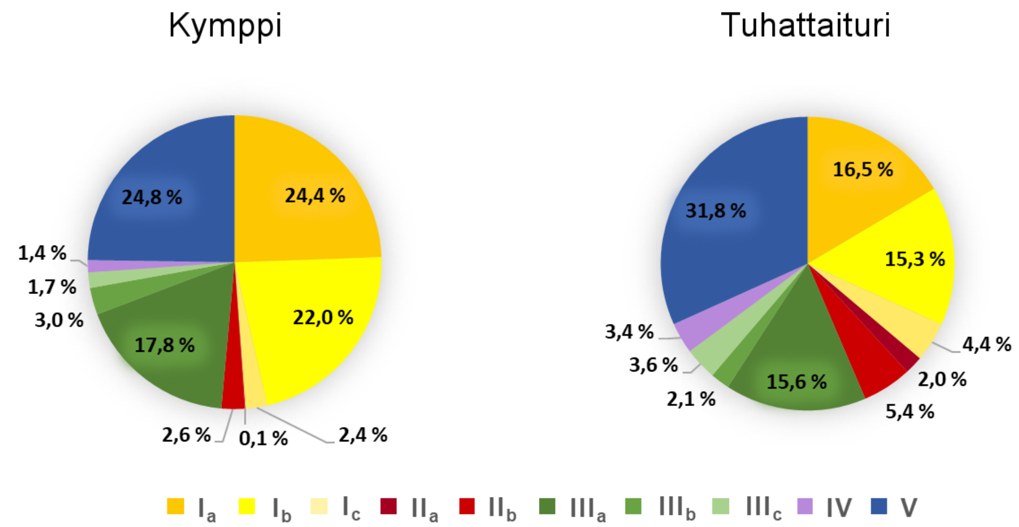
Taulukko 6.5: Tuhattaituri-kirjasarjan yhtälötehtävien sijoittuminen alakategorioihin.

Kirja	$\mathbf{I_a}$	$\mathbf{I_b}$	$\mathbf{I_c}$	$\mathbf{II_a}$	$\mathbf{II_b}$	$\mathbf{III_a}$	$\mathbf{III_b}$	$\mathbf{III_c}$	**IV**	**V**
Tt 1a	66	41	21	14	16	0	0	20	21	55
Tt 1b	106	35	18	5	16	7	0	11	10	74
Tt 2a	104	50	21	1	10	8	0	5	15	98
Tt 2b	83	43	24	10	14	0	3	12	14	128
Tt 3a	55	47	7	11	12	22	0	3	21	183
Tt 3b	27	97	4	6	59	21	1	11	9	76
Tt 4a	47	53	5	10	4	136	0	8	17	96
Tt 4b	59	33	7	4	39	59	22	34	4	145
Tt 5a	43	40	24	13	25	67	0	3	10	128
Tt 5b	23	47	2	2	2	77	47	3	5	109
Tt 6a	38	16	7	1	13	137	0	0	9	105
Tt 6b	8	110	35	3	7	88	11	31	2	73
Yhteensä	659	612	175	80	217	622	84	141	137	1270

Alakategoriaan III_a kuuluu noin 73 % yläkategorian III tehtävistä, joita on vain muutama 1. ja 2. luokan oppikirjoissa. Eniten alakategorian III_a tehtäviä on 4. luokan syksyn kirjassa. Alakategorian III_b tehtäviä on eniten 5. luokan kevään kirjassa, mutta peräti seitsemässä kirjassa niitä ei ole lainkaan. Alakategorian III_c tehtäviä ei puolestaan ole 6. luokan syksyn kirjassa yhtään. Kategorian IV tehtäviä on eniten 1. ja 3. luokan syksyn kirjoissa, 21 kummassakin, mutta 6. luokan kevään kirjassa vain kaksi. Kategorian V tehtäviä on eniten 3. luokan syksyn kirjassa ja vähiten 1. luokan syksyn kirjassa.

Tehtävien sijoittuminen alakategorioihin kirjasarjoittain

Kuvaan 6.24 on koottu tutkimuksen kategorioihin soveltuvien tehtävien sijoittuminen alakategorioihin kirjasarjoittain. Kuvasta nähdään, että kategoriat I_a ja I_b sekä III_a ja V ovat molemmissa kirjasarjoissa suurimmat. Näihin neljään kategoriaan kuuluu lähes 90 % kaikista Kympin tehtävistä ja Tuhattaiturin tehtävistä noin 80 %. Toisin sanoen Kympissä kategorioiden I_c, II_a, II_b, III_b, III_c ja IV osuudeksi jää vain vähän yli 10 %, kun Tuhattaiturissa osuus on hieman yli 20 %. Suurimpien kategorioiden erot näkyvät kuvasta melko hyvin. Vain kategorian V osuus on Tuhattaiturissa Kymppiä suurempi.

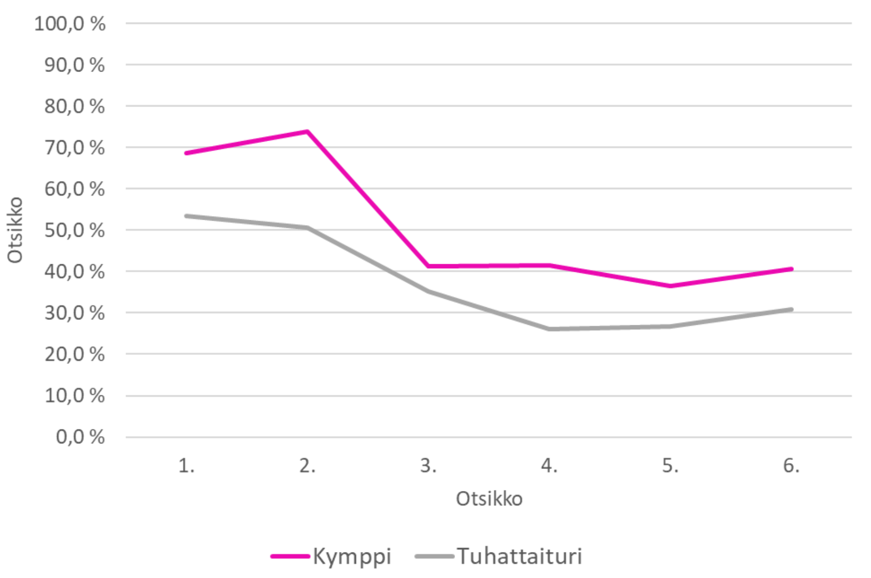


Kuva 6.24: Tehtävien jakautuminen alakategorioihin luokkien 1–6 matematiikan oppikirjoissa Kymppi ja Tuhattaituri.

Pienempien kategorioiden välillä on myös eroja. Esimerkiksi Kymppi-kirjoissa kategorian II_a osuus on vain 0,1 % ja Tuhattaiturissa puolestaan 2 %. Kategoriaan II_b kuuluu Tuhattaiturissa peräti 5,4 % kaikista sarjan kategorioihin kuuluvista tehtävistä. Tämä on Tuhattaiturin viidenneksi suurin alakategoria. Kympissä tähän kategoriaan kuuluu 2,6 % tehtävistä. Myös kategorioiden I_c, III_c ja IV osuudet ovat Tuhattaiturissa noin 2 %-yksikköä suuremmat. Kategorian III_b osuus on sen sijaan Kympissä noin prosenttiyksikön suurempi kuin Tuhattaiturissa.

6.1.5 Standardit ja epästandardit yhtälöt

Standardeihin yhtälöihin kuuluvat kategorian I tehtävät. Kuvaan 6.25 on koottu Kympistä ja Tuhattaiturista näiden tehtävien prosenttiosuudet vuositasoittain. Kategorian I tehtävien osuuksia on tarkasteltu jo alaluvussa 6.1.3, joten tässä yhteydessä niitä ei tutkita enää kovin tarkasti.

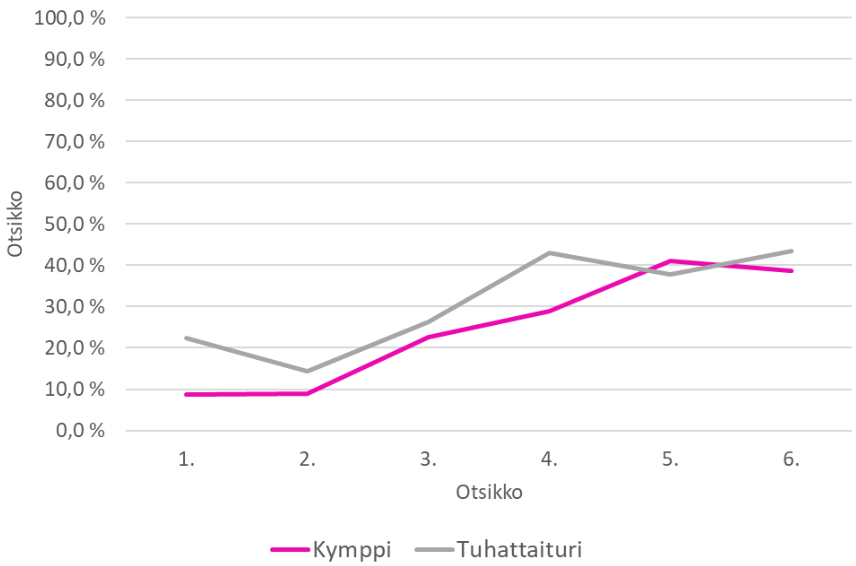


Kuva 6.25: Kympin ja Tuhattaiturin standardeja yhtälöitä sisältävien tehtävien osuudet kaikista kategoriajakoon soveltuvista tehtävistä luokilla 1–6.

Standardien yhtälöiden osuus vähenee jonkin verran vuositasojen edetessä kummassakin kirjasarjassa, mikä vahvistaa hypoteesin. Tuhattaiturissa vain

5. ja 6. luokan kirjoissa osuudet kasvavat hieman. Kympissä sen sijaan kategoriaan I kuuluvien tehtävien prosenttiosuudet vaihtelevat enemmän vuositasojen edetessä. Standardimuotoisten yhtälöiden osuus on Kympissä joka vuositasolla Tuhattaituria suurempi. Suurin ero kirjasarjojen välillä on 2. luokan kirjoissa, yli 23 prosenttiyksikköä. Pienimmillään ero on 3. luokan kirjoissa, noin 5 prosenttiyksikköä. Alaluvussa 6.1.3 tarkasteltiin myös kategorioiden kokonaisosuuksia taulukossa 6.3.

Tässä tutkimuksessa ei ole vielä tarkasteltu epästandardeja yhtälöitä eli yläkategorioiden II, III ja IV yhtälöitä yhtenä kategoriana. Näiden prosenttiosuudet on kerätty kuvaan 6.26 luokkatasoittain. Siinä missä Tuhattaiturissa standardien yhtälöiden osuudet pienenevät melko tasaisesti, Kympissä puolestaan epästandardien yhtälöiden osuus suurenee melko tasaisesti, Tuhattaiturissa hieman epätasaisemmin, mutta tämä vahvistaa hypoteesin. Epästandardien yhtälöiden osuus on Kympin 1. luokan kirjoissa vain 8,7 %, mutta 5. luokan kirjoissa peräti 41,1 %.



Kuva 6.26: Kympin ja Tuhattaiturin epästandardeja yhtälöitä sisältävien tehtävien osuudet kaikista kategoriajakoon soveltuvista tehtävistä luokilla 1–6.

Tuhattaiturissa on myös havaittavissa kasvua epästandardien yhtälöiden osuuksissa vuositasojen edetessä, mutta kasvu ei ole tasaista. Pienimmillään epästandardien yhtälöiden osuus on 2. luokan kirjoissa 14,3 % ja suurimmillaan 6. luokan kirjoissa 43,5 %. Kympissä epästandardien yhtälöiden osuus on Tuhattaiturin vastaavaa osuutta suurempi vain 5. luokan kirjoissa. Osuuksien ero on suurin 4. luokan kirjoissa, joissa Tuhattaiturissa on lähes 15 prosenttiyksikköä suurempi osuus. Pienin ero osuuksissa on 3. luokan kirjoissa, kun Kympin tehtävien osuus on 3,5 prosenttiyksikköä Tuhattaituria pienempi.

Kokonaisuudessaan standardien yhtälöiden osuus on Kympissä noin 49 % ja epästandardien noin 26 % ja Tuhattaiturissa puolestaan standardien noin 36 % ja epästandardien noin 32 %. Tarkasteltaessa vain varsinaisia yhtälöitä sisältäviä kategorioita I–IV, on standardimuotoisten yhtälöiden osuus Kympissä noin 65 % ja epästandardien noin 35 % ja Tuhattaiturissa standardien noin 53 % ja epästandardien noin 47 %. Ilman kategorian V osuuksia on Tuhattaiturissa myös joka vuositasolla suurempi osuus epästandardeja yhtälöitä kuin Kympissä. Pienimmillään ero on vain 6 % ja suurimmillaan jopa 21 %.

6.2 Yhtäsuuruuden ja yhtälöiden määritelmät

Oppikirja-analyysin toisessa osassa tarkastelen yhtäsuuruuden ja yhtälöiden määritelmiä esiopetuksen sekä ala- ja yläkoulujen matematiikan oppikirjoissa. Tutkin oppikirjoista määritelmien lisäksi sitä, miten käsitteet kirjoissa esitellään ja missä vaiheessa opintoja. Jos opettajan opas on saatavilla, tutkin myös, millaisia vinkkejä se tarjoaa yhtäsuuruuden ja yhtälöiden opetukseen. Lisäksi tarkastelen yhtälöihin liittyviä tehtäviä ja sitä, miten yhtälön ratkaiseminen kirjoissa esitetään. Esiopetuksen kirjoista tutkin, miten ja missä vaiheessa yhtäsuuruus esitellään ja millaisia yhtälöitä kirjat sisältävät.

6.2.1 Yhtälöt ja yhtäsuuruus esiopetuksen oppikirjoissa

Tutkin kahta esiopetuksen oppikirjaa, Esiopetuksen laskutaitoa (2014) ja Seikkailujen eskaria (2016). Esiopetuksen laskutaito on vain matematiikan ja Seikkailujen eskari sekä matematiikan että äidinkielen oppikirja. Seikkailujen eskarissa matematiikkaosio on vain 31 sivua, mutta Esiopetuksen laskutaito -kirjassa 96, joten siihen mahtuu myös matematiikan sisältöjä enemmän. Molempien kirjojen tekstit on tavutettu, mutta Esiopetuksen laskutaito -kirjassa on käytetty suuraakkosia.

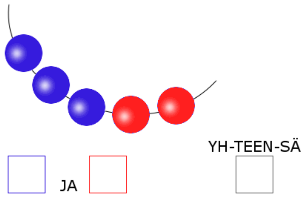
Seikkailujen eskari

Seikkailujen eskarin matematiikkaosio on omana kokonaisuutenaan kirjan lopussa. Kun kirjan kääntää ympäri, on näkyvissä toinen kansisivu, jossa lukee: ”Seikkailujen eskari matikka.” Matematiikkaosio sisältää muun muassa piirustus- ja väritystehtäviä, mittaamista, yhtäläisyyksien ja eroavaisuuksien etsimistä, lukumäärien vertailua, lukumäärien 0–10 hahmottamista kuvin ja numeroin, lukusanojen kirjoittamista sekä lukujonotaitojen vahvistamista. Kirjassa ei esiinny yhtään laskutoimitusta eikä näin ollen myöskään yhtäsuuruusmerkkiä tai yhtälöitä. (Lassila, Marttila, Salminen, & Kolu, 2016)

Esiopetuksen laskutaito

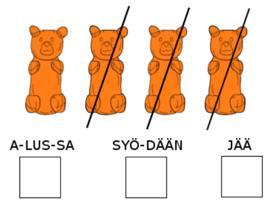
Esiopetuksen laskutaidon esipuheessa painotetaan, ettei lapsilta vaadita vielä esiopetusvaiheessa matemaattisten sisältöjen hallintaa, vaan tavoite on herättää heidän mielenkiintonsa matematiikkaa kohtaan. Kirjan alkuosa on hyvin samansisältöinen kuin Seikkailujen eskarin matematiikkaosio. Esiopetuksen laskutaidossa siirrytään kuitenkin heti lukujen 0–5 esittelyn jälkeen yhteen- ja vähennyslaskuihin näillä luvuilla. Yhteenlaskut aloitetaan laskemalla kuvista lukumääriä, kuten kuvan 6.27 tehtävässä. Käytössä ovat myös ilmaisut ”alussa”, ”tulee lisää” ja ”yhteensä”. Näiden jälkeen esitellään yhteenlasku esimerkin kautta. Esimerkin kuvassa on kaksi istuvaa lasta ja yksi, joka näyttää kävelevän heitä kohti. Kuvan alla on laskutoimitus $2 + 1 = 3$ sekä teksti: "LUE-TAAN: 2 PLUS 1 ON YH-TÄ SUU-RI KUIN 3."Tämän pienen opetusruudun jälkeen harjoitellaan merkkien + ja = piirtämistä sekä yhteenlaskuja siten, että yläpuolella on aina kuva ja alapuolella laskutoimitus. (Hellsten, Saari, Tienhaara, & Uus-Leponiemi, 2014)

Vähennyslasku esitellään ruokatehtävien avulla. Tässä käytetään ilmaisuja ”alussa”, ”syödään” ja ”jää”. Syödyt ruoat on yliviivattu tai niistä on jätetty kääreet tai kuoret näkyviin. Esimerkkikuvassa 6.28 tätä on hahmoteltu nalle-



Kuva 6.27: Mallikuva Esiopetuksen laskutaito -kirjan yhteenlaskun harjoittelutehtävästä helminauhan avulla. Kuinka monta helmeä?

karkkien avulla. Huomionarvoista on, että yhtäsuuruutta ei käsitellä Eskarin laskutaito -kirjassa edellä kuvatun lisäksi enempää, eli merkki vain ilmestyy ja sitä käytetään merkityksessä "anna vastaus", vaikka se mainitaankin luettavan muodossa "on yhtä suuri kuin". Lisäksi kaikki kirjan yhteen- ja vähennyslaskut ovat muodossa $a \pm b = c$. (Hellsten et al., 2014)



Kuva 6.28: Mallikuva Esiopetuksen laskutaito -kirjan vähennyslaskun harjoittelutehtävästä. Yliviivatut syödään. Merkitse lukumäärät.

Vaikka edellä esitellyissä esiopetuksen oppikirjoissa on suuri ero sivumäärissä, on silti hyvä huomioida, että toinen ottaa käsittelyyn yhteen- ja vähennyslaskut symbolisella tasolla, kun toisessa niitä ei esitellä edes käsitteellisellä tasolla.

6.2.2 Yhtälöt ja yhtäsuuruus alakoulun oppikirjoissa

Tähän tutkimuksen toiseen osaan valitsin Kymppi- sekä Tuhattaituri -sarjojen 1., 5. ja 6. luokan kirjat. Valinta on luonteva, sillä yhtäsuuruusmerkki tulee alakoulun matematiikan oppikirjoissa vastaan ensimmäisen kerran 1. luokalla ja yhtälöt puolestaan 5. luokalla. Tämän lisäksi yhtälöitä esiintyy jonkin verran myös 6. luokan kirjoissa.

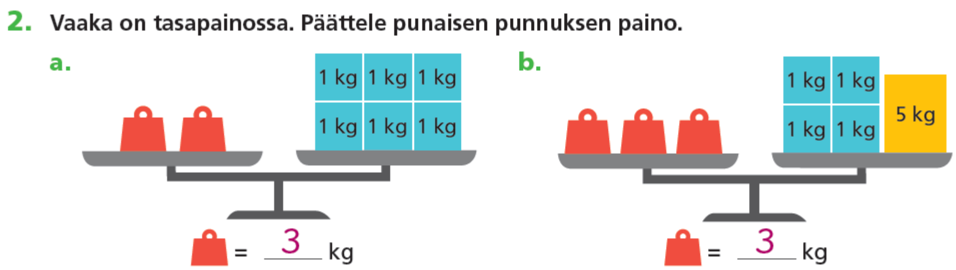
Tuhattaituri

Ennen yhtäsuuruusmerkin esittelyä Tuhattaituri 1a:ssa tutustutaan lukuihin 0–10 ja harjoitellaan lukuja 0–3. Opettajan oppaan toiminnallisiin tehtäviin on lisäksi sisällytetty käsitteiden yhtä monta, enemmän ja vähemmän harjoittelua. Opettajan oppaassa neuvotaan, että vertailutilanteen harjoittelussa kannattaa lähteä liikkeelle yhtäsuuruudesta. Vertailutehtävissä kehotetaan käyttämään konkreettisia välineitä tai kuvia apuna. Vertailtavat esineet voi asettaa esimerkiksi jonoiksi tai pareiksi. Vertailuoperaattorien pienempi ja suurempi kuin ($<, >$) esittelykappaleen tehtävissä lisätään oikeat operaattorit paikoilleen. Opettajan oppaan lisätieto-osiossa mainitaan, että esimerkiksi $2 < 5$ ja $2 + 1 > 1$ ovat epäyhtälöitä ja että myöhemmissä opinnoissa vastaan tulevat myös operaattorit $\geqslant$, $\leqslant$ ja $\neq$. (Forsback, Kalliola, Tikkanen, & Waneus, 2015)

Seuraavaksi esitellään yhtäsuuruusmerkki, jolle ei anneta määritelmää oppilaan tai opettajan kirjassa. Opetusruudussa lukee ainoastaan: ”$4 = 4$, 4 on yhtä suuri kuin 4.” Yhtäsuuruuksien tarkastelu alkaa piirrostehtävillä ja kaikkien kolmen vertailuoperaattorin harjoittelulla. Opettajan oppaan lisätieto-osiossa annetaan määritelmä yhtälölle seuraavasti: ”Merkintää $4 = 4$ kutsutaan yhtälöksi. Yhtälö on kahden lausekkeen merkitty yhtäsuuruus.” Opettajan oppaassa painotetaan laskuvaa'an käyttöä yhtäsuuruuden tutkimiseen ja havainnollistamiseen konkretian tasolla. Yhtäsuuruuden merkitystä tai mahdollisia virhekäsityksiä ei kuitenkaan mainita. Kategorioiden $\mathrm{II_a}$ $\mathrm{II_b}$ ilmaantuessa ensimmäisiä kertoja, on opettajan oppaassa kehotus ohjata oppilasta laskemaan lasku ensin ja vertailemaan sitten. Myöhemmin opettajan oppaassa suositellaan pohtimaan oppilaiden kanssa ennen kyseisiä tehtäviä, että yhtäsuuruusmerkki ”osoittaa sen molemmilla puolilla olevat kaksi lauseketta yhtä suuriksi.” (Forsback et al., 2015) Tuhattaituri 6a:n sanallisten tehtäven yhteydessä opettajan oppaassa mainitaan myös, että yhtäsuuruuden ketjutukseen tulee kiinnittää huomiota. ”Laskun $18 + 32 : 8$ laskemista ei saa merkitä seuraavasti: $32 : 8 = 4 + 18 = 22$, – – sillä yhtäsuuruus ei toteudu.”

(Kiviluoma et al., 2018a)

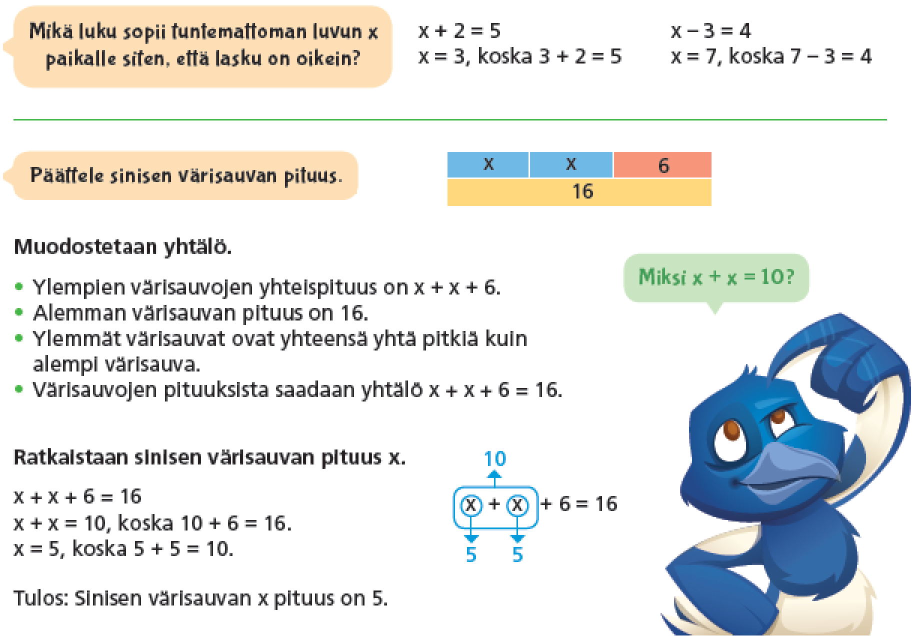
Tuhattaituri 5a:ssa tutustutaan ongelmanratkaisuun. Ensin esitellään piirrosten käyttö ratkaisun apuna ja sitten tutkitaan yhtäsuuruuksia vaakamallin avulla päätellen. Laskutoimituksia ei ole näkyvissä vielä tässä vaiheessa. Vaa'an yhtäsuuruus esitellään seuraavasti: "Vaaka on tasapainossa, kun sen molemmat puolet painavat yhtä paljon. Vaaka pysyy tasapainossa, jos sen kummallekin puolelle lisätään tai molemmilta puolilta otetaan pois saman verran painoja." Lähes kaikki tehtävät ovat kuvan 6.29 kaltaisia, joissa päätellään punnusten painoja. Joissain tehtävissä selvitetään, kuinka paljon painoja pitää tyhjään vaaka-astiaan lisätä, jotta vaaka olisi tasapainossa. Seuraavaksi kirjassa tutustutaan tuntemattomaan, jota merkitään alusta asti



Kuva 6.29: Kategorian V vaakatehtävä. Teoksesta Tuhattaituri 5a opettajan opas sivu 22.

kirjaimella x. Yhtälöiden ratkaisut etsitään päättelemällä, kuten kuvan 6.30 opetusruudun esimerkissä. Tehtävien visualisointiin on käytetty värisauvoja, jotka näkyvät myös kuvassa. Opettajan oppaassa on useita toiminnallisia tehtäviä, joissa harjoitellaan tuntemattoman käsitettä. Eräs on sellainen, jossa opettaja kirjoittaa taululle jonkin yhtälön, peittää siitä paperilla yhden tekijän ja arvuuttelee lukua oppilailta. (Kiviluoma et al., 2017)

Tuhattaituri 6b sukeltaa kunnolla yhtälöiden maailmaan jakson 3 kappaleessa loppupuolella. Esimerkeissä muodostetaan ongelmasta yhtälö, joka ratkaistaan ensin päättelemällä ja tarkistetaan sitten sijoittamalla saatu vastaus alkuperäiseen yhtälöön. Yhtälölle annetaan seuraavanlainen määritelmä:



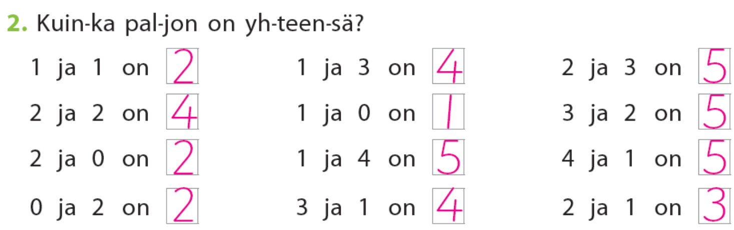
Kuva 6.30: Opetusruutu tuntemattoman käytöstä ratkaisun apuna sekä yhtälön ratkaisutapa. Teoksesta Tuhattaituri 5a opettajan opas sivu 26.

> *”Yhtälö muodostuu kahdesta lausekkeesta ja niiden väliin merkitystä yhtäsuuruusmerkistä (=).”*

Lisäksi teoriaosuudessa kerrotaan, että: ”Yhtälössä tuntematonta lukua merkitään yleensä kirjaimella x.” Opettajan oppaassa korostetaan, että tuntemattoman luvun x arvo etsitään kokeilemalla tai päättelemällä. Opettajan oppaan lisätieto-osiossa esitellään identtinen ja ehdollinen yhtälö: ”Ehdollisessa yhtälössä on muuttuja (esim. x), jonka arvosta riippuu, onko yhtälö tosi vai epätosi. Esimerkiksi yhtälö $x + 5 = 9$ on ehdollinen yhtälö. Identtisessä yhtälössä ei ole muuttujaa. Identtinen yhtälö $6 = 6$ on tosi, ja identtinen yhtälö $6 = 7$ on epätosi.” (Kiviluoma et al., 2018b)

Kymppi

Kymppi 1 syksy -kirjan toisessa kappaleessa esitellään yhtäsuuruusmerkki, jota harjoitellaan piirtämällä sekä hahmottamalla yhtäsuuruuksia kuvista. Opettajan oppaassa kehotetaan opettajaa piirtämään yhtäsuuruusmerkin taululle ja selvittämään, ketkä oppilaista tuntevat merkin ja osaavat kertoa sen merkityksen. Opas neuvoo lukemaan yhtäsuuruusmerkin joko ”on yhtä suuri tai on yhtä monta.” Lisäksi kehotetaan pohtimaan yhtäsuuruuksia asioiden välillä, esimerkiksi: ”Onko 4 aikuista yhtä monta kuin 4 lasta?"Muuta yhtäsuuruudesta ei opettajan oppaan puolella mainita. Vaikka tässä kappaleessa esitellään yhtäsuuruusmerkki, se näkyy lukujen välillä ainoastaan opetusruudussa yhtälöiden $3 = 3$ ja $6 = 6$ kohdalla. Merkin piirtoharjoittelua lukuun ottamatta yhdessäkään kappaleen tehtävässä ei ole yhtäsuuruusmerkkiä. Vasta kappaleessa, jossa esitellään vertailuoperaattorit suurempi kuin $>$ ja pienempi kuin $<$, on ensimmäinen tehtävä, jossa vertailuoperaattori laitetaan lukujen väliin. Tässä yhteydessä opettajan oppaassa on havainnollistus, jossa vertailuoperaattorit on esitetty pallojen kanssa seuraavasti: ●●● $>$ ●● ja ● $<$ ●●. Seuraavan kappaleen tehtävissä sekä puuttuvat vertailuoperaattorit että luvut asetetaan tyhjiin laatikoihin kuvavihjeiden avulla. Yhteenlaskun esittelyn kohdalla yhtäsuuruusmerkin tilalla on käytetty ”on”-verbiä, kuten kuvan 6.31 tehtävässä. Opettajan oppaan opetusvinkeissä mainitaan, että yhtälön $2 + 1 = 3$ voi lukea lyhyemmin: ”2 plus 1 on 3.” Vähennyslaskun kohdalla vastaavasti sanotaan, että yhtälön $4 - 1 = 3$ voi lukea lyhyemmin: ”4 miinus 3 jää 1.” (Rinne, Salonen, Sintonen, & Uus-Leponiemi, 2017)

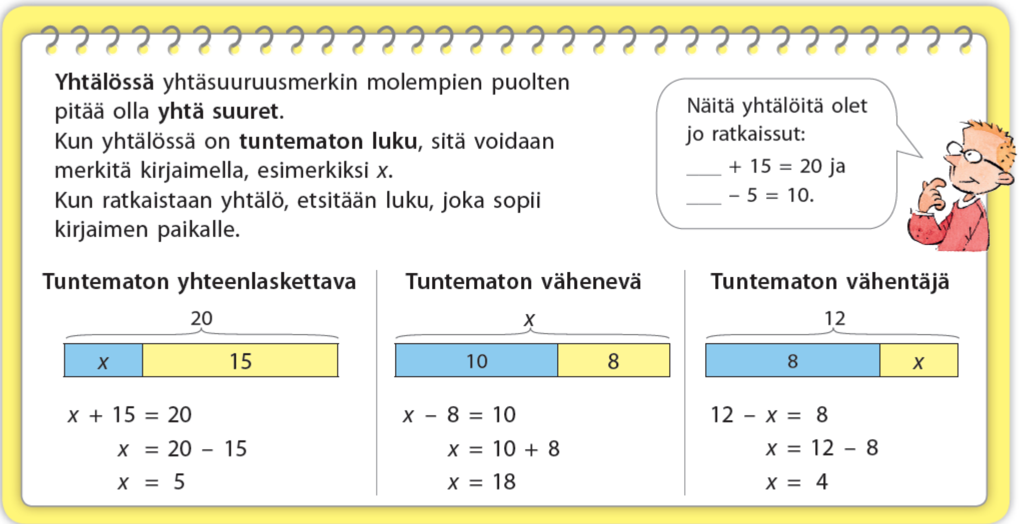


2. Kuin-ka pal-jon on yh-teen-sä?

1 ja 1 on 2	1 ja 3 on 4	2 ja 3 on 5
2 ja 2 on 4	1 ja 0 on 1	3 ja 2 on 5
2 ja 0 on 2	1 ja 4 on 5	4 ja 1 on 5
0 ja 2 on 2	3 ja 1 on 4	2 ja 1 on 3

Kuva 6.31: Tehtävä, jossa yhtäsuuruusmerkki on korvattu ”on”-verbillä. Teoksesta Open Kymppi 1 syksy, sivu 46.

Kymppi 5 kevät -kirjassa tutustutaan palkkimalliin yhtälönratkaisun tukena. Aluksi tuntemattoman luvun paikalla on kysymysmerkki ja vasta yhtälöiden yhteydessä x. Kuvan 6.32 opetusruudussa ratkaistaan yhtälöitä palkkimallin avulla. Opettajan oppaan mukaan ei ole tarkoitus oppia vielä 5.



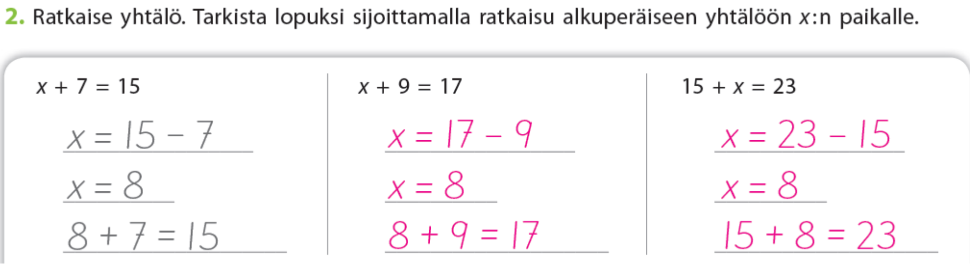
Kuva 6.32: Yhtälöiden teoriaruutu sekä yhtälötehtävien ratkaisutavat ja palkkimallit. Teoksesta Open Kymppi 5 kevät, sivu 90.

luokalla yhtälönratkaisun systemaattisia ratkaisutekniikoita, kuten termien siirtämistä. Yhtälölle ei myöskään anneta oppilaan kirjassa varsinaista määritelmää, mutta se esitellään kirjassa näin:

> *”Yhtälössä yhtäsuuruusmerkin molempien puolten pitää olla yhtä suuret.”*

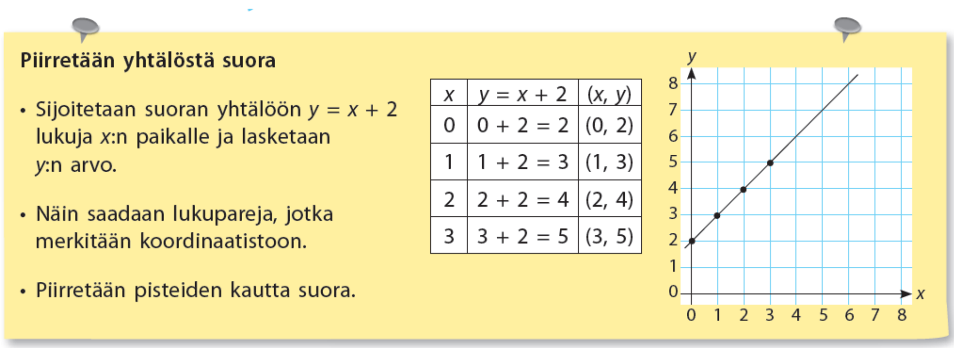
Kuvan 6.32 opetusruudussa esitellään myös tuntematon x sekä yhtälön ratkaisemisen perusteet. Tehtävissä yhtälöitä lähestytään esimerkin kaltaisten laskujen kautta. Esimerkeissä ei oteta huomioon vastauksen tarkistamista, mutta kuvan 6.33 tehtävän tehtävänannossa mainitaan ratkaisun tarkistaminen sijoittamalla. Yhtäsuuruusmerkkiä tai yhtäsuuruutta ei mainita opettajan oppaassa yhtälöiden yhteydessä lainkaan. (Rinne, Salonen, Sintonen, & Uus-Leponiemi, 2016)

Kuudennen luokan matematiikan kirjoissa ei yhtälöitä esiinny varsinaisessa materiaalissa ollenkaan. Ainoastaan Kymppi 6 Kevät -kirjan lopun valinnaisissa aiheissa on suoran yhtälöitä käsittelevä kappale, jossa ratkotaan



Kuva 6.33: Yhtälötehtävä, jossa saatu ratkaisu tarkistetaan. Teoksesta Open Kymppi 5 kevät, sivu 90.

suoran y-koordinaatit taulukkoon ja piirretään suora, kuten kuvan 6.34 esimerkissä. (Kiviluoma et al., 2018b)



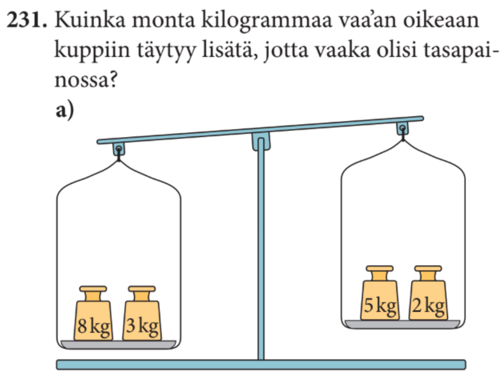
Kuva 6.34: Suoran piirtäminen suoran yhtälön avulla. Teoksesta Open kymppi 6 kevät, sivu 120.

6.2.3 Yhtälöt ja yhtäsuuruus yläkoulun oppikirjoissa

Yläkoulun matematiikan oppikirjoista valitsin tutkimuksen toiseen osaan seuraavat: Editan Säde 1, Kustannusosakeyhtiö Otavan Pii 7 ja Sanoma Pron Kuutio 7. Näistä tutkin yhtäsuuruuden ja yhtälöiden määritelmiä. Lisäksi poimin Kuution ja Piin opettajan oppaista opetusvinkkejä. Oppikirjoissa on joitakin eroja, vaikka niissä on myös paljon samaa. Säde 1 -kirjan teoriaosuus on kaikkein suppein ja sisältää vain muutamia virkkeitä kappaletta kohden. Kuutiossa puolestaan teoria selitetään monisanaisimmin ja Piin teoriaosuuden pituus on näiden väliltä. Yhtälöt esitellään kirjoissa melko samassa järjestyksessä. Yhtälönratkaisussa edetään päättelytehtävistä yhden vaiheen yhtälöihin, sitten useamman vaiheen yhtälöihin ja lopulta sanallisiin ongelmanratkaisutehtäviin. Kaikissa kirjoissa on alusta asti myös tehtäviä, joissa yhtälöt muodostetaan itse joko vinkeistä tai täysin sanallisista tehtävistä.

Säde

Säde 1 -kirjan kirjainlaskentaosuus alkaa lauseen arvon laskemisella ja kirjainlaskennan mallien ja perusteiden esittelyllä. Yhtälöt esitellään vaa'an tasapainotuslaskujen avulla. Lähes kaikissa tehtävissä on kuva vaa'asta, joka on jo tasapainossa ja siitä täytyy päätellä tuntematon luku x tai sitten vaaka tulee tasapainottaa, kuten kuvan 6.35 tehtävässä. Kappaleessa esitellään



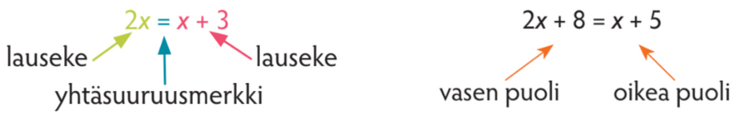
Kuva 6.35: Säteen vaa'an tasapainotustehtävä. Teoksesta Säde 1, sivu 195.

myös yhtälön määritelmä:

> *"Yhtälössä kaksi lauseketta on merkitty yhtä suuriksi."*

Määritelmän havainnekuvaan, joka on kuvassa 6.36 vasemmalla, on poimittu termeistä lausekkeiden lisäksi myös yhtäsuuruusmerkki. (Etelämäki, Koppatz, Laitinen, Lammi, & Nieminen, 2015)

Yhtälön ratkaisu esitellään seuraavasti: "Yhtälön toteuttavaa lukua nimitetään yhtälön ratkaisuksi tai yhtälön juureksi." Tähän yhteyteen on lisätty kuvan 6.36 oikeanpuoleinen havainnekuva, jossa näkyvät yhtälön oikea ja vasen puoli. Tehtävissä joko päätellään ratkaisu tai ratkaistaan yhtälö



Kuva 6.36: Säteen kaksi havainnekuvaa yhtälöstä. Teoksesta Säde 1, sivu 192 ja sivu 200.

sijoittamalla. Seuraavaksi esitellään yhtälön ratkaiseminen vähentämällä ja jakamalla. Tässä mukaan otetaan myös useamman laskuvaiheen vaativia yhtälöitä, kuten kuvan 6.37 tehtävässä. Tämän jälkeen kirjassa on vielä yhtälön ratkaisemista kertomalla, yhtälöharjoituksia sekä -ongelmia. Kertausosiossa esitellään lisäksi yhtälönratkaisun vaiheet. (Etelämäki et al., 2015)

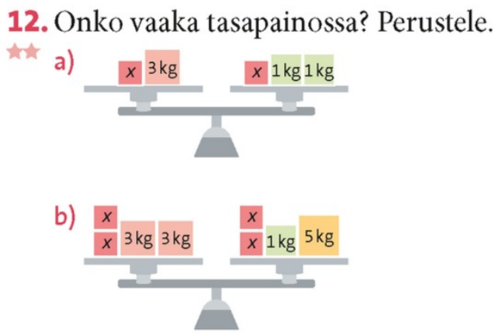
289. Ratkaise yhtälö.
a) $5x + 2 = 3x + 8$
b) $7y + 4 = 2y + 49$

Kuva 6.37: Säteen useamman välivaiheen yhtälönratkaisutehtävä. Teoksesta Säde 1, sivu 208.

Pii

Pii 7 -kirjan kirjainlaskentaosiossa harjoitellaan ensin muun muassa lausekkeen arvon laskemista sijoittamalla sekä kirjainlaskentaan liittyviä operaatioita, kuten samanmuotoisten termien yhdistämistä ja lausekkeen kertomista luvuilla. Yhtälöiden käsittely alkaa yhtäsuuruuden käsitteen vahvistamisella tasapainovaa'an avulla. Vaa'an toimintaa kuvataan näin: "Vaaka on tasapainossa, kun sen molemmat puolet painavat yhtä paljon. Vaaka pysyy tasapainossa, mikäli vaa'an molemmille puolille lisätään tai kummaltakin puolelta otetaan pois saman painon verran punnuksia." Opettajan oppaan lisätietoa ja toteuttamisvihjeitä -osiossa kannustetaan vaakamallin käyttöön ja kerrotaan sen olevan hyvä keino perustella yhtäsuuruuden säilymistä. Tavoitteksi vaakamallin käytössä mainitaan niin erilaisten ratkaisustrategioiden löytäminen kuin perustelujen muodostaminen ensin sanallisesti ja myöhemmin myös kirjallisessa muodossa. (Heinonen, Luoma, & Mannila, 2012)

Luvun 15 tehtävissä on yksi, jonka tehtävänanto ja havainnollistus eivät toimi aivan toivotulla tavalla käsi kädessä. Kuvan 6.38 tehtävässä kysytään, onko vaaka tasapainossa. Molemmat vaa'at ovat kuvan havainnollistuksen mukaan tasapainossa, mutta ylempi ei kuitenkaan punnusten painojen mukaan ole. Muissa vastaavissa tehtävissä kysytään, onko vaaka tasapainossa, jos tuntemattoman punnuksen massa on jokin annettu luku. Annettu luku ei välttämättä ole oikea, mutta jokin toinen luku on. Jälkimmäisessä tehtävässä ei synny samaa ristiriitaa kuvan tehtävässä. (Heinonen et al., 2012)



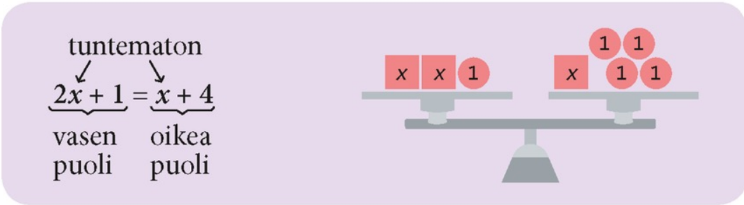
Kuva 6.38: Piin vaakatehtävä. Teoksesta Pii 7, sivu 150.

Seuraavaksi kirjassa edetään yhtälön matemaattiseen esitystapaan ja yhtälö määritellään näin:

> *"Yhtälö on kahden lausekkeen merkitty yhtäsuuruus. Yhtälön vasemman ja oikean puolen välissä on yhtäsuuruusmerkki."*

Tässä luvussa oppilaille esitellään myös tuntemattoman käsite. Yhtälön määritelmän yhteydessä on kuvan 6.39 havainnollistus. Opettajan lisätieto-osiossa mainitaan, että tähän ja muihin yhtälöön liittyviin käsitteisiin on hyvä tutustua huolellisesti väärinymmärrysten välttämiseksi. Käsitteinä mainitaan yhtälön vasen ja oikea puoli sekä termi, mutta ei kuitenkaan yhtäsuuruutta ja siihen liittyvää yhtäsuuruusmerkkiä. (Heinonen et al., 2012)

Seuraava kappale keskittyy yhtälön ratkaisun etsimiseen päättelemällä tai kokeilemalla. Kirjassa verrataan yhtälönratkaisua palapeliin seuraavasti:



Kuva 6.39: Piin havainnekuva yhtälöstä. Teoksesta Pii 7, sivu 152.

”Etsiessäsi puuttuvaa palapelin palaa joko kokeilet vaihtoehtoja muodon perusteella tai teet päätelmiä palapelin kuvasta.” Niin palapelin kuin yhtälön ratkaisemiseen on useita tapoja. Yhtälön ratkaisu määritellään seuraavasti: ”Yhtälön ratkaisuna on se luku, jolla yhtälö on tosi.” Opettajan lisätieto-osiossa mainitaan, että yhtälön ratkaisua kutsutaan myös juureksi. Opetuksessa ehdotetaan korostettavan, että yhtälön ratkaisun tulee toteuttaa yhtälön molemmat puolet. (Heinonen et al., 2012)

Pii 7 -kirjan seuraavassa luvussa edetään yhtälön ratkaisemiseen laskemalla. Yhtälön ratkaisemisesta puhutaan kirjassa yhtälön yksinkertaistamisena, jonka edellytyksenä on, että yhtäsuuruus säilyy. Näin ollen yksinkertaistetun yhtälön ratkaisu on sama kuin alkuperäisen. Ensimmäiset yhtälöt ratkeavat lisäämällä tai vähentämällä yksi termi yhtälön molemmin puolin, kuten kuvan 6.40 tehtävässä. Yhtälön ratkaisun tarkistaminen esitellään sijoittamalla

Ratkaise yhtälö laskemalla.

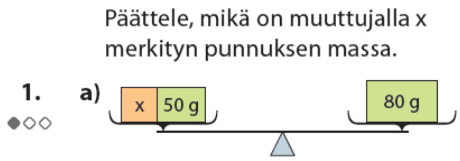
5. a) $x - 9 = 13$ b) $x - 7 = -7$
c) $x - 2 = -1$ d) $x - 5 = 7$

Kuva 6.40: Piin yhtälönratkaisutehtävä. Teoksesta Pii 7, sivu 162.

saatu x:n arvo alkuperäiseen yhtälöön ja vertaamalla yhtälön oikean ja vasemman puolen arvoja. Opettajan lisätieto-osiossa kehotetaan käyttämään havainnollistuksissa yhä apuna vaakamallia. Seuraavassa luvussa käsitellään termien lisäämistä ja vähentämistä, jolloin laskuvaiheita on useampi. Tämän jälkeen esitellään termien siirtäminen ja yhtälön ratkaiseminen jakamalla ja kertomalla sekä erilaisia yhtälöitä. Vaakamalli jätetään pois, kun yhtälöiden abstraktisuus lisääntyy, eli esimerkiksi, kun tuntemattoman edessä on miinusmerkki. Yhtälöiden ratkaisemisen tueksi opettajan oppaassa kehotetaan oppilaita kirjoittamaan vihkoon yhtälönratkaisumenetelmä, joka opettajan oppaassa myös esitellään. (Heinonen et al., 2012)

Kuutio

Kuutio 7 -kirjassa esitellään termi muuttuja monipuolisesti. Muuttuja-sanan kerrotaan viittaavan siihen, että sen arvot voivat vaihdella ja että sitä käytetään, kun halutaan yleistää jokin sääntö. Kirjassa myös mainitaan, että muuttujan merkitsemiseen voidaan käyttää kirjaimia. Seuraavissa kappaleissa esitellään lauseke, termi ja yhtälöt. Myös Kuutio käyttää yhtälöiden esittelyn tukena tasapainovaakaa ja ratkaisujen löytämistä päättelemällä, kuten kuvassa 6.41. Yhtälöt esitellään laajasti: ”Yhtälö on väite, jossa kahta lause-

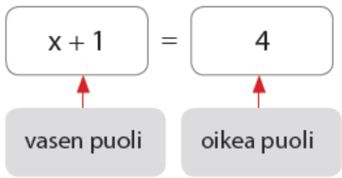


Kuva 6.41: Kuution vaakatehtävä, joka ratkaistaan päättelemällä. Teoksesta Kuutio 7 Opettajan materiaali, sivu 66.

ketta väitetään yhtä suuriksi. Yhtälön väitteen ei tarvitse olla tosi. On olemassa sellaisia yhtälöitä, jotka ovat tosia, ja sellaisia, jotka ovat epätosia.” Tämän lisäksi yhtälölle annetaan seuraava määritelmä:

> *”Kun kaksi lauseketta merkitään yhtäsuuriksi, saadaan yhtälö.”*

Yhtäsuuruusmerkki esitellään kirjassa näin: "Yhtäsuuruusmerkki jakaa yhtälön vasempaan ja oikeaan puoleen."Tätä seuraa kuva 6.42, jossa on hieman vähemmän informaatiota kuin Säteen ja Piin vastaavissa havainnekuvissa. Yhtälö-kappaleessa esitellään myös yhtälön ratkaiseminen. Yhtälöä ratkaistaessa pyritään kirjan mukaan löytämään kaikki ne luvut, jotka voi sijoittaa muuttujan paikalle siten, että yhtälö on tosi. Yhtälön ratkaisu määritellään seuraavasti: ”Yhtälön ratkaisu eli juuri on luku, joka sijoitettuna muuttujan paikalle toteuttaa yhtälön.” Ensimmäiset yhtälöt ratkaistaan päättelemällä



Kuva 6.42: Kuution havainnekuva yhtälöstä. Teoksesta Kuutio 7 Opettajan materiaali, sivu 68.

tai kokeilemalla, eli sijoittamalla annettu luku yhtälön tuntemattoman paikalle. Kuvan 6.43 tehtävässä haastetaan oppilaita päättelemään tehtävän ratkaisu, kun systemaattisia ratkaisumenetelmiä ei ole vielä opetettu. (Hassinen, Latva, & Makkonen, 2016) Tämä tehtävä on hyvä esimerkki siitä, että yhtälö voi olla monimutkaisen oloinen, mutta ratkaisu silti yllättävän helposti löydettävissä.

17. Päättele yhtälön ratkaisu.

a) $2x - 3 = 9$ **b)** $2(x - 1) = 16$

c) $4(x + 2) = 20$ **d)** $\frac{x - 3}{4} = 2$

Kuva 6.43: Kuution päättelytehtävä. Teoksesta Kuutio 7 Opettajan materiaali, sivu 70.

Seuraavassa kappaleessa edetään yhtälön systemaattisempaan ratkaisutapaan käänteisillä laskutoimituksilla. Kirjaan on kerätty myös tietolaatikko, jossa ovat laskutoimitukset, jotka yhtälölle voi tehdä. Seuraavissa kappaleissa esitellään termien siirto, yhtälön ratkaiseminen vaiheittain sekä sanalliset ongelmanratkaisutehtävät. Opetusvihjeissä kehotetaan painottamaan yhtälönratkaisutaitojen merkitystä esimerkiksi ongelmanratkaisussa. (Hassinen et al., 2016)

Luku 7

Tulosten tarkastelu ja analyysi

Tulosten tarkastelussa lähden liikkeelle tutkimuksen kvantitatiivisesta osasta, jossa tutkin alakoulun matematiikan oppikirjoissa esiintyviä yhtälöitä sekä niiden jakautumista kategorioihin. Tulosten tarkastelussa etenen tutkimuskysymyksittäin alkaen tehtävätyypeistä ja siirtyen niiden jakautumiseen kategorioihin niin luokka-asteittain kuin oppikirjoittain. Tämän jälkeen siirryn tutkimuksen kvalitatiiviseen osaan, jossa tarkastelussa olivat esiopetuksen, ala- ja yläkoulun oppikirjat yhtäsuuruuden ja yhtälöiden määritelmien osalta. Pyrin löytämään yhtäläisyyksiä ja eroavaisuuksia oppikirjojen määritelmistä sekä opettajan oppaiden vinkeistä soveltuvin osin.

7.1 Oppikirja-analyysi

Tutkimuksessa alakoulun oppikirjojen yhtälötehtävät jaettiin kolmeen pääkategoriaan: standardit ja epästandardit yhtälöt sekä muut yhtäsuuruustehtävät. Näistä epästandardit yhtälöt jaettiin edelleen kolmeen, joten yläkategorioita oli viisi. Standardit yhtälöt sekä kaksi epästandardien yhtälöiden yläkategoriaa jaettiin vielä alakategorioihin, joten tutkimuksessa oli yhteensä 10 yhtälökategoriaa. Kategoriajaossa otettiin mallia tutkijoiden McNeil et al. (2006), Li et al. (2008) ja Powell (2012) tutkimuksista.

Molemmat kirjasarjat sisälsivät yhtälötehtäviä, jotka olivat tyypillisiä tietyille alakategorioille. Kirjoissa oli myös vähemmän selvästi kategorioihin kuuluvia tehtäviä sekä tehtäviä, jotka olisi voinut luokitella useampaan kategoriaan. Kategorian $\mathrm{I_a}$ tyypillisimmät tehtävät olivat tavallisia yhteen-, vähennys-, kerto- tai jakolaskuja, kategorian $\mathrm{I_b}$ puolestaan sanalliset tehtävät. Kategorian $\mathrm{I_c}$ tehtävät olivat kaikki suoraan määritelmän mukaisia, eli niistä puuttui yhtälön vasemmalta puolelta yksi tekijä. Kategorialla $\mathrm{II_a}$ oli kaksi tyypillistä tehtävätyyppiä: sellainen, jossa yhtälön oikealta puolelta puuttui toinen tekijä ja sellainen, jossa tuli täyttää puuttuvat vertailuoperaattorit. Kategorian $\mathrm{II_b}$ tyypilliset tehtävät olivat samankaltaisia kuin kategorian $\mathrm{II_a}$, mutta niissä operaatioita oli molemmin puolin yhtälöä. Kategorian $\mathrm{III_a}$ tyypilliset tehtävät olivat sellaisia, joissa oli samassa lausekkeessa sekä yhteen- tai vähennyslasku että kerto- tai jakolasku. Kategorioiden $\mathrm{III_b}$, $\mathrm{III_c}$ ja IV tyypillisimmät tehtävät olivat täysin määritelmien mukaisia. Vain harva kategorian V tehtävä sisälsi varsinaisia yhtälöitä, sen sijaan niissä oli tyypillisimmin laskulausekkeita ja vastaus, mutta ei yhtäsuuruusmerkkiä tai yhtäsuuruusmerkki, mutta ei operaatioita.

7.1.1 Tehtävien sijoittuminen kategorioihin

Tehtävät jakautuivat kategorioihin luokkatasoittain melko vaihtelevasti. Kympissä yläkategorian I osuus oli suurin joka luokka-asteella, mutta 1. ja 2. luokan kirjoissa vielä huomattavasti suurempi kuin 3.–6. luokan kirjoissa. Yläkategorian I tehtävien osuus oli korkeimmillaan 2. luokan syksyn kirjassa, lähes 80 %. Tuhattaiturissa yläkategoria I oli suurin 1. ja 2. luokalla, mutta lopuissa kirjoissa toiseksi tai kolmanneksi suurin. Suurimmillaan yläkategorian I tehtävien osuus oli 1. luokan kevään kirjassa, noin 56 %. Lisäksi tutkimuskysymysten yhteydessä esitettiin hypoteesi, että standardimuotoisten yhtälöiden osuus vähenisi oppikirjoissa luokkatasojen edetessä, mikä tutkimuksessa tuli myös vahvistettua.

Yläkategorian II osuudet vaihtelivat jonkin verran vuositasoittain. Kympissä osuudet olivat pieniä, suurimmillaan alle 6 %, mutta Tuhattaiturissa suurimmillaan jopa yli 12 %. Kirjoittain tarkasteltaessa Tuhattaiturin 3. luokan kevään kirjassa osuus oli lähes 20 %. Tämän kategorian tehtävien määristä ei tehty ennakko-oletuksia, mutta aiemmissa tutkimuksissa niiden osuuden on todettu olevan pieni. Tämän kategorian tehtävien merkitys on kuitenkin suuri, sillä erityisesti alakategorian $\mathrm{II_b}$ ekvivalenssitehtävien on todettu auttavan yhtäsuuruuden käsitteen syvällisemmässä ymmärryksessä (McNeil et al., 2006).

Yläkategorian III osuudet olivat 1. ja 2. luokan oppikirjoissa pienet. Kympissä osuus kasvoi huomattavasti 2. ja 3. luokan kirjojen välillä ja pysyi lopuilla luokka-asteilla suurin piirtein samoissa lukemissa. Tuhattaiturissa kasvu tapahtui vasta 3. ja 4. luokan kirjojen välillä. Näitä tehtäviä ei juurikaan tutkittu muissa tutkimuksissa. Kuitenkin erityisesti alakategoriaan $\mathrm{III_c}$ kuuluvien vertailuoperaattorien samanaikainen opettaminen voi auttaa oppilaita ymmärtämään paremmin yhtäsuuruuden relationaalisuuden (Hattikudur & Alibali, 2010). Kategoria IV oli pieni molemmissa oppikirjoissa kaikilla vuositasoilla. Sen osuus oli suurimmillaan 1. luokan kirjoissa, joista Kympissä noin 3 % ja Tuhattaiturissa noin 6 % Myöskään näitä tehtäviä ei ole huomioitu aiemmissa tutkimuksissa. Tämän kategorian mielenkiintoisin seikka on siinä, että joidenkin lukujen tilalla on symboleita, kun Ikäheimo (1997) sekä Carpenter et al. (2003) toteavat, ettei tehtävissä tulisi sekoittaa konkretian tasoa ja symbolitasoa. Kategorian V tehtävien osuudet sen sijaan vaihtelivat melko paljon vuositasoittain. Kummassakin kirjasarjassa tämän kategorian tehtäviä oli eniten 3. luokan kirjoissa.

Tehtävien kokonaismäärät jakautuivat muuten melko tasaisesti kirjasarjojen välillä luokka-asteittain, mutta Kympin 5. luokan kirjoissa oli noin sata ja 6. luokan kirjoissa lähemmäs kaksisataa tehtävää enemmän. Ylipäätään Kymppi-sarjassa oli noin 10 % enemmän tutkimukseen soveltuvia tehtäviä kuin Tuhattaituri-sarjassa. Kirjasarjojen välillä oli eroja myös tehtävien sijoittumisessa kategorioihin. Kummassakin kirjasarjassa kategoria I oli suurin, sen osuus oli Kympissä noin 49 % ja Tuhattaiturissa noin 36 %. Kympissä kategorian I osuus oli myös joka luokka-asteella suurempi kuin Tuhattaiturissa. Tuhattaiturissa puolestaan kategorian II osuudet olivat joka vuositasolla Kympin osuuksia suuremmat. Kympissä yhteensä vain noin 3 % tehtävistä kuului tähän kategoriaan, kun Tuhattaiturissa osuus oli noin 7 %.

Alakategorioista $\mathrm{I_a}$, $\mathrm{I_b}$, $\mathrm{III_a}$ ja V olivat kummankin kirjasarjan kohdalla suurimmat, mutta Kympissä näihin kuului noin 90 % tehtävistä, kun Tuhattaiturissa vain noin 80 %. Alakategorian $\mathrm{I_c}$ tehtävien osuus oli molemmissa kirjasarjoissa pieni, Tuhattaiturissa kuitenkin hieman Kymppiä suurempi. Erityisen mielenkiintoisia olivat alakategorioiden $\mathrm{II_a}$ ja $\mathrm{II_b}$ väliset erot Kympin ja Tuhattaiturin välillä. Vaikka molemmissa kirjasarjoissa oli alakategorian $\mathrm{II_a}$ tehtäviä vähän, löytyi niitä Kympistä vain kahdesta kirjasta yhteensä 3, kun Tuhattaiturissa tehtäviä oli joka kirjassa vähintään yksi ja yhteensä 80. Myös kategorian $\mathrm{II_b}$ tehtäviä oli Tuhattaiturissa lähes kaksinkertainen määrä Kymppiin verrattuna.

7.1.2 Standardit ja epästandardit yhtälöt

Kaikista tutkimuksen tehtävistä standardeja yhtälöitä oli kummassakin oppikirjassa enemmän kuin epästandardeja. Tämä tulos on linjassa aiempien tutkimusten kanssa, joissa standardien yhtälöiden osuus on ollut myös suurin, kuten McNeil et al. (2006), Li et al. (2008), Powell (2012) ja Pursiainen & Suontakanen (2016). Tämä oli myös eräs tämän tutkimuksen hypoteeseista, joka tuli vahvistetuksi. Kympissä standardeja yhtälöitä oli joka vuositasolla myös Tuhattaituria enemmän ja epästandardeja yhtälöitä puolestaan Tuhattaiturissa melkein kaikilla vuositasoilla. Epästandardien yhtälöiden osuudet myös kasvoivat kummassakin kirjasarjassa vuositasojen edetessä, Kympissä hieman Tuhattaituria tasaisemmin.

7.1.3 Yhtäsuuruuden ja yhtälöiden määritelmät

Yhtäsuuruudelle ei esitetty yhdessäkään oppikirjassa varsinaista määritelmää. Kuitenkin Tuhattaituri 1a:n opettajan oppaassa, ikään kuin sivuhuomiona, kehotetaan parin tehtävän apuvinkkinä puhumaan oppilaiden kanssa ennen tehtävän tekemistä siitä, että yhtäsuuruusmerkki ”osoittaa sen molemmilla puolilla olevat kaksi lauseketta yhtä suuriksi.” Tuhattaituri 1a:n opettajan opas myös sisälsi paljon yhtäsuuruuden käsitettä vahvistavia leikkejä ja toiminnallisia tehtäviä. Siinä myös kehotettiin käyttämään tasapainovaakaa yhtäsuuruuden käsitteen havainnollistamiseen. (Forsback et al., 2015) Kympissä vastaavia mainintoja oli huomattavasti vähemmän, vaakamallia ei mainittu eikä yhtäsuuruuden opetukseen kiinnitetty yhtä paljon huomiota.

Yhtälön määritelmät olivat joka oppikirjassa eri sanamuodoin esiteltyjä ja osa mainitsi määritelmässä yhtäsuuruusmerkin. Yhtäsuuruusmerkkiä ei kuitenkaan ole määritelmän kannalta mitenkään välttämätöntä mainita. Tuhattaiturin ja Kympin määritelmissä oli sävyero. Tuhattaiturin määritelmä oli seuraava: "Yhtälö muodostuu kahdesta lausekkeesta ja niiden väliin merkitystä yhtäsuuruusmerkistä (=) (Kiviluoma et al., 2018b)." Ja Kympin määritelmä oli: "Yhtälössä yhtäsuuruusmerkin molempien puolten pitää olla yhtä suuret (Rinne et al., 2016)." Tuhattaiturin määritelmässä mainitaan kyllä yhtäsuuruusmerkki, mutta ei oteta kantaa yhtälön yhtäsuuruuden paikkansapitävyyteen, sillä mainitut lausekkeet voivat olla mitä tahansa. Kympissä sen sijaan määritelmän mukaan yhtäsuuruuden tulee olla voimassa. Itse asiassa ilman yhtälö-sanaa tämä olisi hyvä määritelmä yhtäsuuruudelle. Kumpikaan määritelmistä ei ole täysin sama kuin alussa esitetty määritelmä: "Yhtälö on kahden matemaattisen lausekkeen välinen yhtäsuuruus (Clapham & Nicholson, 2014)."

Yläkoulun oppikirjoissa sen sijaan määritelmät ovat melko samanlaisia, erityisesti Säteen ja Kuution osalta. Kaikissa mainitaan kaksi lauseketta ja yhtäsuuruus. Säteen määritelmä on seuraava: "Yhtälössä kaksi lauseketta on merkitty yhtä suuriksi (Etelämäki et al., 2015)", ja Kuution: 'Kun kaksi lauseketta merkitään yhtäsuuriksi, saadaan yhtälö (Hassinen et al., 2016)." Piin määritelmä on sen sijaan hieman monisanaisempi: "Yhtälö on kahden lausekkeen merkitty yhtäsuuruus. Yhtälön vasemman ja oikean puolen välissä on yhtäsuuruusmerkki (Heinonen et al., 2012)."

7.2 Oppimateriaali yhtäsuuruuden opetukseen

Tämän tutkimuksen tulosten sekä aiemman tutkimuksen pohjalta olen luonut oppituntikokonaisuudet yhtäsuuruuden opettamiseen ja sen relationaalisen ymmärryksen vahvistamiseen. Oppituntikokonaisuuden tavoitteena on auttaa lapsia ja nuoria muodostamaan relationaalinen käsitys yhtäsuuruudesta tai vahvistaa jo orastavaa relationaalista käsitystä operationaalisen sijaan. Toisena tavoitteena on kitkeä mahdollisia aiemmin syntyneitä virhekäsityksiä yhtäsuuruudesta ja yhtäsuuruusmerkistä. Yhtäsuuruusmerkin systemaattiselle opettamiselle on tutkimusten nojalla tarvetta. Luotuun oppimateriaaliin on pyritty kehittämään eri luokkatasoille sopivia aktiviteetteja, joiden valintaa on itse asiassa perusteltu jo alaluvussa 4.2, mutta kerrataan tässä myös lyhyesti. Itse oppimateriaali löytyy tämän työn liitteestä 2.

Oppituntien didaktinen perustelu

Yläkoululaisilla on tutkimusten mukaan vaikeuksia yhtälönratkaisussa ja erilaisia virhekäsityksiä esiintyy paljon (Booth et al., 2014; Ko & Karadag, 2013; Knuth et al., 2006). Yhtäsuuruusmerkkiin liittyvät virhekäsitykset ovat sitkeimmästä päästä (Booth et al., 2014), mutta yhtäsuuruusmerkin relationaalinen ymmärrys on yhtälönratkaisussa tärkeää (Carpenter et al., 2003). Virheellinen käsitys yhtäsuuruusmerkistä voi syntyä jo ennen kouluikää (Falkner et al., 1999), eikä sen opettamiseen kiinnitetä tutkimusten mukaan riittävästi huomiota (McNeil & Alibali, 2005b). Yhtäsuuruusmerkin relationaaliseen ymmärrykseen olisi hyvä kiinnittää huomiota heti, kun merkki ensimmäisen kerran tulee opetuksessa esille (Falkner et al., 1999) ja vahvistaa tätä ymmärrystä myös myöhemmillä luokilla ala- sekä yläkoulussa (Knuth et al., 2006; Alexandrou-Leonidou & Philippou, 2007). Lisäksi oppimisvaikeuksien ennaltaehkäisy on tärkeää ja se tulisi huomioida jo varhaiskasvatuksen puolella (Räsänen, 2012). Myös esimatemaattisten taitojen, kuten luokittelu ja vertailu, vahva pohja edesauttaa matematiikan oppimista (Dräger, 2015).

Esiopetuksen matematiikan opintojen tehtävänä on innostaa lapsia ja kasvattaa heidän kiinnostustaan matematiikkaa kohtaan leikkien ja pelien kautta (Opetushallitus, 2014a). Esiopetuksessa ei ole siis tarkoituksenmukaista alkaa ratkoa yhtälöitä, varsinkaan symbolisella tasolla, vaikka niitä on tähän oppituntiin sisällytetty. Sen sijaan esiopetuksen opetussuunnitelman perusteet (2015a) mainitsevat ongelmanratkaisutehtävien käytön sekä lukumäärien vertailun ja lukumäärän muutoksen tutkimisen käytännön esimerkein. (Opetushallitus, 2014a) Koska lapset ymmärtävät yhtäsuuruuden paremmin konkreettisella kuin symbolisella tasolla (Sherman & Bisanz, 2009; Falkner et al., 1999), on yhtäsuuruusmerkin opettaminen esikoululaisille suunniteltu pääasiassa konkreettisella tasolla tapahtuvaksi. Lisäksi yhtäsuuruusmerkki esitellään symbolisella tasolla vasta aivan oppimateriaalin lopussa. Yhtäsuuruusmerkki opetetaan lapsille alusta alkaen relationaalisena eikä ”anna vastaus” -tyyppisenä. Alakoulun 1.ja 2. luokalla on tärkeää luoda hyvä pohja esimatemaattisille taidoille, joita matematiikan opinnoissa tarvitaan läpi elämän. Yhtäsuuruusmerkin opetukseen ei kuitenkaan tämän eikä aiempien tutkimusten mukaan kiinnitetä riittävästi huomiota. Vaikka oppimateriaaliin on otettu yhtälöt mukaan, ei ole tarkoitus siirtää yläkoulun oppisisältöjä aiemmaksi, vaan pikemminkin tutkia ongelmanratkaisun kautta yhtäsuuruuden käsitettä ja sen relationaalisuutta. Kehittämässäni oppimateriaalissa esiopetuksen ja alakoulun sisällöt ovat lähes identtiset, sillä molemmilla on tarkoitus opettaa yhtäsuuruusmerkki. Yläkoulun oppimateriaali on suunniteltu seitsemännen luokan alkuun yhtäsuuruusmerkin relationaalisen käsityksen vahvistamiseksi sekä haastamaan operationaalinen näkemys.

Etsi samanlaiset

Tämän tehtävän pohjimmainen tarkoitus on vahvistaa lukukäsitettä sekä auttaa lapsia havainnoimaan ja vertailemaan lukumääriä, jotka esiintyvät eri muodoissa. Lukuja on numerokortteina ja monenlaisina kuvina, joissa esiintyy sekä nopan silmälukuja että erilaisia esineitä. Nämä kaikki on tarkoitus yhdistää numeroon ja samalla vahvistaa lukumäärän käsitettä. Leikki sisältää myös toiminnallisuutta ja siinä liikutaan ympäri luokkahuonetta.

Vertailua

Tämän tehtävän tarkoituksena on vertailla ensin kuvakortissa olevien esineiden lukumääriä oikein termein: ”enemmän kuin”, ”yhtä monta kuin” ja ”vähemmän kuin” ja tämän jälkeen numerokorttien lukumääriä termein: ”suurempi kuin”, ”yhtä suuri kuin” ja ”pienempi kuin”. Lisäksi hahmotetaan yhtäsuuria ja erisuuria asioita johdantona seuraavaan tehtävään.

Nallekarkkitehtävä

Nallekarkkitehtävässä ratkotaan yksinkertaisia yhtälöitä, mutta kyseessä on pikemminkin ongelmanratkaisu- kuin yhtälönratkaisutehtävä. Tämä tehtävä on kehitetty professori Juha Oikkosen idean pohjalta. Pussiyhtälöiksi Oikkosen nimeämä malli on vaihe vaiheelta etenevä ongelmanratkaisutehtävä, jota tehdessään lapsi huomaamattaan ratkaisee ensimmäisiä yhtälöitään. Pussiyhtälötehtävä on toiminnallisuutta ja ongelmanratkaisua yhdistävä lähestymistapa, joka toimii linkkinä yhtäsuuruuden käsitteen havainnollistamisessa ja ymmärtämisessä. Yleisesti yhtälöiden havainnollistamiseen käytetään vaakamallia, jossa vaa'an kahden puolen välinen tasapaino vastaa yhtälön yhtäsuuruutta. Tasapainovaaka on kenties parhaiten yhtäsuuruuden käsitettä havainnollistava väline, mutta sen heikkous on siinä, ettei vaakoja nykypäivänä näe juuri missään. Pussiyhtälöissä tasapainoa kuvaa kaksi lautasta, joilla pitää tehtävänannon mukaan olla koko ajan sama määrä karkkeja. Pussiyhtälömallin vahvuudeksi voi lukea sen, että välineet ovat helposti saatavilla ja ongelman voi helposti myös toistaa itse. Ongelma on itsessään arkipäiväinen ja helposti lähestyttävä, sillä kukapa haluaisi jakaa karkit kaverin kanssa epätasaisesti. Tämän lisäksi tutkimuksen mukaan lapset ymmärtävät paremmin yhtäsuuruuden relationaalisuuden havainnollistusten kautta kuin symbolikielellä toteutetuissa laskuissa (Sherman & Bisanz, 2009).

Pussiyhtälöt on siis nimetty uudelleen nallekarkkitehtäväksi. Tässä tehtävässä lapsille ei puhuta yhtälöistä eikä laskuja merkitä näkyviin, vaan käydään asiaa vain konkreettisella tasolla esineiden avulla. Tehtävässä herätellään lasten esialgebrallisia taitoja sekä haastetaan yhtäsuuruuden käsitteestä mahdollisesti jo muodostunutta operationaalista käsitystä tuomalla esiin yhtäsuuruuden relationaalisuus. Tehtävässä lähdetään liikkeelle tilanteesta, jossa vahvistetaan lukumäärän käsitettä ja esitellään kahden lautasen välinen yhtäsuuruus. Tämän jälkeen siirrytään ensimmäisen tason ongelmanratkaisutehtäviin, joissa selvitetään, kuinka monta karkkia karkkipussissa on siten, että toisen lautasen karkkimäärä vastaa suoraan karkkipussissa olevien karkkien lukumäärää. Tämä on paras suorittaa esi- ja alkuopetuksessa konkreettisin välinein ja jos mahdollista, paljastaa oppilaille jokaisen pussin sisältö, kun oppilaat ovat vastanneet kysymykseen. Mahdollisista toteutustavoista on lisää vinkkejä ohjeissa. Tehtävässä on tärkeää edetä askel kerrallaan ja tehdä tarvittaessa saman tason tehtäviä useampia, jotta lapsi varmasti ymmärtää, mistä on kyse. Joka vaiheen jälkeen kootaan ajatuksia yhtäsuuruudesta ja valmistellaan seuraavaa vaihetta kysymysten kautta. Tehtävissä on myös pyritty huomioimaan, että tuntemattoman paikka vaihtelisi yhtälön molemmin puolin ja myös määrät kasvaisivat pienistä suuriin yhden vaiheen sisällä. Tärkeää on saavuttaa oppimisen ja onnistumisen ilo, minkä vuoksi opettajalle on laitettu ylös apuvinkkejä, joita lapsille voi tarjota ilman, että paljastaa tehtävän ratkaisua. Vygotskylaisessa hengessä tässä on tarkoitus, että opettajan tai ohjaajan seurassa lapset pääsevät ratkomaan haastavampia tehtäviä kuin mihin he yksinään kykenisivät. Nallekarkkitehtävistä viimeiset ovat huomattavasti ensimmäisiä haastavampia ja sopivat myös yläkouluun. Joka tapauksessa opettajan kannattaa valita tehtävistä omalle ryhmälle sopivimmat ja luoda tehtäviä lisää. Materiaalissa on pikemminkin ehdotuksia tehtävän toteuttamiseen kuin täydellinen tehtävärunko.

Vaaka

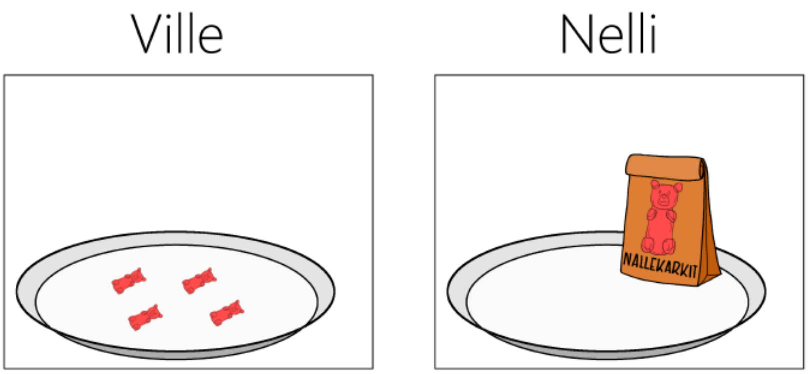
Yhtäsuuruuksien tutkiminen tasapainovaa'an kanssa on erittäin hyvä jatko edelliselle tehtävälle, sillä nyt vaa'an tasapainottamista pääsee harjoittelemaan. Jos vaakaa ei ole käytössä, voi käyttää esimerkiksi ilmaisen GCompris-ohjelman ”Tasapainota vaa'at oikein” -tehtävää apuna. Yhteenlaskua tarvitsee hieman osata, mutta symbolitason laskuja ei tarvitse käyttää. Tämän jälkeen on hyvä pohtia jälleen, mitä yhtäsuuruus on.

Yhtälöpeli

Myös yläkouluun kuuluu toiminnallisuus ja tässä pelissä oppilaat pääsevät sekä kilpailemaan toisiaan vastaan että ratkomaan yhtälöitä samalla. Yhtälöt voivat olla helppoja, jolloin peli soveltuu myös alakouluun, mutta niistä voi tehdä myös haastavia, jolloin peli soveltuu vaikka lukioon.

Yhtäsuuruuden opetusvinkit

Kun yhtäsuuruutta tarkastellaan yhteisesti, perehdytään erityisesti lasten ja nuorten käsityksiin yhtäsuuruudesta ja pyritään havainnoimaan muutoksia oppitunnin alun ja lopun välillä. Jos virheelliset käsitykset ovat hyvin pinttyneitä, voi niihin joutua palaamaan useamman kerran ja mielellään yhtäsuuruuden käsitteeseen tulisikin palata usein varsinkin alakoulun aikana. Taululla on myös hyvä käydä yhteisesti muutama esimerkki nallekarkkitehtävän avulla. Taululle voi piirtää ympyrät kuvaamaan lautasia ja lautasten alle jonkin tehtävävaiheen luvut. Voidaan palata esimerkiksi oppimateriaalin nallekarkkitehtävään 2.1, jonka vasemmalla lautasella on neljä karkkia ja oikealla karkkipussi. Vasemmanpuoleisen lautasen alle kirjoitetaan luku 4 ja mietitään yhdessä, kuinka monta karkkia on piilossa pussissa. Kun oikea luku selviää, kirjoitetaan se ylös. Viereen voi laittaa myös haastavamman tilanteen, kuten kuvassa 7.1. Tästä tehtävästä kirjoitetaan taululle lautasten alle luvut 1 ja 6 ja pohditaan yhdessä, miten monta karkkia tulisi lisätä vasemmanpuoleiselle lautaselle. On hyvä kiinnittää huomiota oikeisiin ilmaisuihin, eli nallekarkkeja on yhtä monta (Ikäheimo et al., 1998; Carpenter et al., 2003). Kun määrä on keksitty voi sen kirjoittaa taululle lukuna. Palataan pohtimaan ensimmäisen kohdan yhtäsuuruutta. Oppilaita voi kehottaa taululle piirtämään merkin, joka kuvaa kahden luvun välistä yhtäsuuruutta. Myös toisesta tilanteesta voi pohtia, miten siinä tulisi toimia, jos yhteenlaskut symbolisella tasolla eivät tunnu ajankohtaisilta, voi tämän kohdan sivuuttaa.



Kuva 7.1: Oppimateriaalin nallekarkkitehtävä 3.1, jossa selvitetään pussissa olevien karkkien määrä, kun tiedetään, että lautasilla on yhtä monta karkkia.

Luku 8

Pohdinta

Eräänä iltana yläkoululaisten matematiikan kokeita korjatessa havaitsin, että yhtäsuuruusmerkkiin liittyvät virheet täyttivät koepaperit punakynällä, vaikka laskut oli muuten laskettu melko hyvin. Tämä sysäsi liikkeelle halun selvittää, mistä nuo virheet juontavat juurensa. Perehdyin ensin yläkoululaisten virhekäsityksiin ja tutkimukset johdattivat minut aina päiväkoti-ikäisiin asti. Suomessa on tehty jonkin verran tutkimusta algebran oppimisesta ja opetuksesta sekä siirtymästä aritmetiikasta algebraan (Hihnala, 2005; Näveri, 2009), mutta hyvin vähän yhtäsuuruusmerkistä. Tämän vuoksi koin merkitykselliseksi selvittää, missä vaiheessa matematiikan opintoja yhtäsuuruusmerkki oppikirjoissa esitellään ja miten. Oppikirjat yhdessä opettajan materiaalien kanssa antavat melko hyvän kuvan siitä, kuinka merkitykselliseksi jokin käsite koetaan.

8.1 Yhtäsuuruus ja yhtälöt oppikirjoissa

Alakouluikäisille ei tarjota riittävästi mahdollisuuksia monimutkaisen matemaattisen ajattelun kehittämiseen, kuten yhtäsuuruusmerkin relationaaliseen tulkintaan, vaikka heillä olisi jo tähän tarvitavia kykyjä (Carpenter et al., 2003). Heille tarjotuissa tehtävissä yhtäsuuruusmerkki näkyy pääasiassa operationaalisena (McNeil & Alibali, 2005a), mikä tässäkin tutkimuksessa tuli esille. Esiopetuksen oppikirjoista Seikkailujen Eskari -kirjassa ei ollut ainoatakaan laskua ja Esiopetuksen laskutaito -kirjassa kaikki tehtävät esittivät yhtäsuuruusmerkin muodossa ”anna vastaus”. Alakoulun oppikirjoissa myös suurin osa yhtälöistä esiintyi standardimuodossa $a * b = c$, missä $*$ on jokin peruslaskutoimituksista $+, -, \cdot$ tai $:$. Erityisen merkitykselliseksi yhtäsuuruuden ymmärtäminen muuttuu yhtälönratkaisun kohdalla, koska yhtälönratkaisumenetelmissä tulee ymmärtää suorittaa operaatiot kummallekin puolelle yhtälöä (Carpenter et al., 2003). Myös siirtymä aritmetiikasta algebraan voisi helpottua, jos yhtäsuuruus ymmärrettäisiin jo ainakin osittain relationaalisena ja voitaisiin keskittyä muihin abstraktimman algebran haasteisiin, kuten tuntemattoman käsitteeseen ja konkreettisesta mallista luopumiseen.

Opettajat eivät tutkimusten mukaan kiinnitä yhtäsuuruusmerkkiin yläkoulussa riittävästi huomiota, sillä käsite on jo opetettu alakoulussa (Knuth et al., 2006, 2005). He myös arvioivat oppilaiden yhtäsuuruusmerkin osaamisen ja yhtälönratkaisutaidot herkästi yläkanttiin (Asquith et al., 2007). Tämän vuoksi myös yläkoulun puolella tulisi keskittyä yhtäsuuruuden käsitteen vahvistamiseen, ja tutkituista yläkoulun oppimateriaaleissa oli huomattavissa pieniä viitteitä tästä. Kuutio, Pii ja Säde ottivat kukin esille vaakamallin käytön yhtälön tasapainon tutkimisen yhteydessä ja tehtävissä edettiin loogisesti päättelystä laskuihin. Vaikka vaakamalli esitettiin, ei opettajan oppaissa kuitenkaan kiinnitetty juurikaan huomiota yhtäsuuruuden käsitteen tärkeyteen. Piissä kuitenkin korostettiin vaakamallin käyttöä hyvänä keinona yhtäsuuruuden säilymisen perustelussa. Opettajat eivät lisäksi välttämättä tiedosta, että heidän tulisi kiinnittää huomiota oppilaiden mahdollisiin virhekäsityksiin yhtäsuuruudesta (Vermeulen & Meyer, 2017).

Opettajien oma käsitys yhtäsuuruudesta voi tutkijoiden Attorps & Tossavainen (2007) mukaan olla myös vajavainen. He huomasivat tutkimuksessaan, että opettajat ja opettajaopiskelijat käsittävät yhtälöt usein laskennallisena prosessina eivätkä kahden asian välisenä yhtäsuuruutena. (Attorps & Tossavainen, 2007) Opettajien käsityksiä yhtäsuuruudesta ei todennäköisesti oteta riittävästi huomioon opettajankoulutuksessa. Yhtäsuuruusmerkki ei myöskään tärkeydestään huolimatta ainakaan opetussuunnitelmien perusteiden ja oppimateriaalien perusteella ole vielä löytänyt arvoistaan sijaa. Jotta lasten virhekäsityksiin voidaan puuttua, tulee heidän käsityksensä yhtäsuuruudesta huomioida jo silloin, kun laskutoimitukset esitellään (Falkner et al., 1999). Suomessa tämä tapahtuu joko esiopetuksen puolella tai ensimmäisellä luokalla. Myös yläkoulun puolella on mahdollista oikaista virhekäsityksiä, mutta se voi olla haastavaa, jos virhekäsitykset ovat kovin pinttyneitä.

Yhtäsuuruusmerkin syvällisen ymmärryksen muodostumiseen menee aikaa, minkä vuoksi sen opettamiseen tulisi kiinnittää enemmän huomiota (Knuth et al., 2006) ja tätä ymmärrystä tulisi myös vahvistaa läpi alakoulun (Carpenter et al., 2003). Dräger (2015) peräänkuuluttaa esimatemaattisia taitojen kehittämistä jo ennen kouluikää matematiikkavaikeuksien ehkäisemiseksi. Tutkimuksen esiopetuksen oppikirjoista toinen otti esiin laskutoimitukset, mutta toinen ei. Näin lapsille voi kehittyä jo esiopetuksessa hyvin suuret erot esimerkiksi yhtäsuuruusmerkin osalta, elleivät opettajat kiinnitä tähän huomiota ja pyri tasoittamaan opetuksessaan tuota välimatkaa. Oma ehdotukseni on, että esiopetuksessa keskityttäisiin yhtäsuuruuden käsitteen vahvistamiseen konkreettisella tasolla välineiden avulla. Lisäksi yhdessä vähemmän kuin ja enemmän kuin -käsitteitä olisi hyvä käyttää yhtäsuuruuden opetuksen tukena. Erityisesti yhtäsuuruudesta tulisi keskustella ja oppilaiden käsityksiä tuoda ilmi. Yhtäsuuruusmerkki voitaisiin myös esitellä jo esiopetuksen puolella. Esiopetuksessa ei tarvitse käyttää suuria lukuja, jotta yhtäsuuruus asioiden välillä tulee ilmi. On tärkeää edetä oppilaiden taitotason mukaisesti ja systemaattisesti aiemman tiedon päälle rakentaen. Näitä on pyritty huomioimaan alaluvussa 7.2 lyhyesti esitellyssä yhtäsuuruuden oppimateriaalissa. Eräs merkityksellinen havainto aiemman tutkimuksen puolella oli, että ne oppilaat, jotka eivät olleet opiskelleet vielä algebraa ja sen formaaleja ratkaisustrategioita, ratkaisivat yhtälöitä paremmin, jos heidän käsityksensä yhtäsuuruusmerkistä oli relationaalinen (Knuth et al., 2006). Tämä väite tukee näkemystä, että yhtäsuuruusmerkin opettamiseen tulisi kiinnittää enemmän huomiota ja tukea sen relationaalista ymmärrystä alusta asti.

Opetussuunnitelmien perusteet ohjaavat opettajan työtä ja auttavat varmistamaan, että jokainen koululainen saa opetusta kunkin oppiaineen tärkeiksi koetuista aiheista ja sisällöistä sopivassa järjestyksessä. Myös oppikirjat tukevat opettajaa työssään ja vaikuttavat opettajan näkemyksiin matematiikasta sekä hänen tapaansa opettaa (Vermeulen & Meyer, 2017). Ottaen huomioon yhtäsuuruuden käsitteen tärkeyden ja sen läsnäolon lähes kaikissa matematiikan laskuissa, on yllättävää, etteivät opetussuunnitelmien perusteet ja oppimateriaalit ota juuri lainkaan kantaa sen ymmärtämiseen. Eräs syy sille, ettei oppikirjoissa ole korostettu yhtäsuuruusmerkkiä voi olla se, etteivät perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet ota kantaa sen oppimisen tärkeyteen. Näin ollen jää hyvin paljon opettajan vastuulle, miten yhtäsuuruusmerkki opetetaan. Tämän vuoksi olisi tärkeää, että tutkimustieto saavuttaisi opettajat ja yhtäsuuruusmerkin opettamiseen alettaisiin kiinnittää enemmän huomiota. Myös esiopetuksen, ala- ja yläkoulun opettajien välinen yhteistyö on erittäin tärkeässä roolissa, kun pohditaan matematiikan opetusta. Eri kouluasteiden opettajat voisivat tehdä vielä nykyistäkin enemmän yhteistyötä matematiikan opetuksen kehittämiseksi.

Tässä tutkimuksessa havaittiin, ettei yhdessäkään tutkituista oppimateriaaleista (2 esiopetuksen oppikirjaa, 24 alakoulun oppikirjaa ja 3 yläkoulun oppikirjaa) kiinnitetty huomiota yhtäsuuruuden merkitykseen. Myöskään tutkituissa opettajan materiaaleissa tätä ei huomioitu. Tuhattaiturissa oli alakoulun kirjasarjoista hieman enemmän viittauksia yhtäsuuruuteen sekä muun muassa toiminnallisia tehtäviä käsitteen ymmärtämisen vahvistamiseksi. Nämä tulokset ovat linjassa tutkijoiden Li et al. (2008) tutkimuksen osaan, jossa he keskittyivät yhdysvaltalaisten oppimateriaalien tutkimiseen. Yhdysvaltalaisissa materiaaleissa ei juurikaan kiinnitetty huomiota yhtäsuuruusmerkkiin ja sen opettamiseen. Sen sijaan kiinalaiset oppimateriaalit tuntuvat kiinnittävän enemmän huomiota yhtäsuuruusmerkin ymmärtämiseen sekä monipuolisiin tapoihin opettaa sitä. Kiinalaisissa opettajan oppaissa annetaan myös lukuisia vinkkejä yhtäsuuruuden opetukseen. Tutkijat huomasivat lisäksi, että kiinalaiset 6. luokkalaiset pärjäsivät yhdysvaltalaisia ikätovereitaan huomattavasti paremmin tehtävissä, joissa yhtälön molemmilla puolilla oli operaatioita. Tutkijat epäilivät yhdeksi syyksi oppimateriaalien erot ja sitä kautta erot yhtäsuuruuden opetuksessa.(Li et al., 2008) Näiden huomioiden pohjalta voisi olettaa, että myös suomalaisissa oppimateriaaleissa kiinnitetään liian vähän huomiota yhtäsuuruusmerkin tärkeyteen ja sitä kautta sen opetukseen. Toki kaikki opettajat eivät käytä opettajan oppaita opetusta ja oppitunteja suunnitellessaan, mutta hyvin monet käyttävät. Vermeulen & Meyer (2017) toteavat, että opettajat turvautuvat herkästi oppikirjoihin erityisesti silloin, kun heidän oma koulutuksensa aiheeseen ei ole riittävä. (Vermeulen & Meyer, 2017) Tämä voi koskea myös monia suomalaisia luokanopettajia, jotka eivät ole esimerkiksi lukeneet matematiikan sivuainetta tai muuten perehtyneet aiheeseen syvällisemmin. Powell (2012) huomasi lisäksi, että oppikirjoissa saatettiin antaa eri vuositasoilla yhtäsuuruusmerkille aina erilainen määritelmä, joka voi hänen mukaansa sekoittaa oppilaita. Tämän vuoksi myös yhtäsuuruusmerkin esittelyn systemaattisuuteen olisi hyvä kiinnittää huomiota.

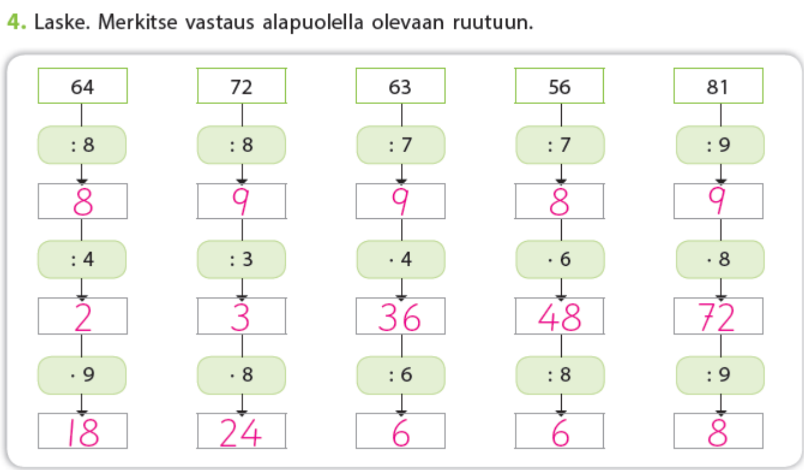
Alakoulun oppikirjasarjojen Kymppi ja Tuhattaituri erot ovat yllättävän suuria yhtälöiden ja yhtäsuuruuden suhteen. Kymppi-kirjasarjassa oli todella vähän tehtäviä, jotka haastoivat yhtäsuuruuden operationaalisen käsityksen. Tämän lisäksi Kympissä yhtälöitä käsiteltiin huomattavasti vähemmän ja käytännössä vain viidennen luokan kevään kirjassa. Open Kymppi 1 syksy -kirjan alussa myös neuvotaan lukemaan yhtäsuuruusmerkki joko "on yhtä suuri tai on yhtä monta." (Rinne et al., 2017) Tämä on kuitenkin toisin kuin mitä Ikäheimo et al. (1998) ehdottavat. Heidän mukaansa symbolisessa tilanteessa tulisi käyttää vain termiä "on yhtä suuri kuin" ja havainnollistuksissa termiä "on yhtä monta kuin". (Ikäheimo et al., 1998) Kympissä oli myös käytetty vertailumerkkejä pallojen välillä, mutta oppilaan kirjassa sen sijaan ei. Tämä on kuitenkin yksi tutkijoiden Carpenter et al. (2003) ja Ikäheimo et al. (1997) listaamista vältettävistä merkintätavoista, joita on listattuna taulukkoon 4.2.

Yhtälökategorioista standardiyhtälöiden kohdalla oli Tuhattaiturissa havaittavissa pientä nousua 5. ja 6. luokan kirjoissa. Tuhattaituri 5a:ssa oli käyrässä pieni huippu ja 6. luokan kevään kirjassa erittäin suuri ero verrattuna syksyn kirjaan. Nämä voivat selittyä sillä, että 5a-kirjassa esiteltiin yhtälöt ja 6b-kirjassa näitä ratkottiin myös erittäin paljon. Suurin osa näiden kappaleiden yhtälöistä kuului nimenomaan yläkategoriaan I. Erityisesti yläkategoriassa II kirjasarjojen erot olivat suuret, sillä Tuhattaiturissa kategorian tehtäviä oli yli kaksinkertainen määrä. McNeil et al. (2006) totesivat erityisesti kategorian $\mathrm{II_b}$ tehtävien, eli operaatioita molemmin puolin yhtäsuuruusmerkkiä sisältävien yhtälöiden, auttavan yhtäsuuruuden ymmärtämisessä relationaalisesti, joten niitä tulisi tarjota opetuksessa ja oppikirjoissa runsaasti. Sen kummempaa selittävää tekijää oppikirjojen välisille eroille ei löytynyt, sillä esimerkiksi murtolukuja käsiteltiin kirjoissa lähes saman verran. Tuhattaiturissa vain oli enemmän tämän yläkategorian II yhtälötehtäviä. Lisäksi molemmissa oppikirjasarjoissa yläkategorian III osuudet kasvoivat huomattavasti, Kympissä 2. ja 3. luokan ja Tuhattaiturissa 3. ja 4. luokan kirjojen välillä. Tähän on mitä todennäköisimmin syynä laskujen haasteellisuuden kasvaminen ja siten välivaiheita sisältävien tehtävien määrän kasvu. Taulukoista myös havaittiin selkeästi, ettei kategorian III tehtäviä ollut kovin paljoa 1. ja 2. luokan kirjoissa. Vertailuoperaattoreita kuitenkin esiintyi yhdessä yhtäsuuruusmerkin kanssa, kuten aiempi tutkimus ehdottaa (Hattikudur & Alibali, 2010).

Ei voi yksiselitteisesti sanoa, että jompikumpi näistä kirjasarjoista olisi toista parempi ja varsinkaan niin ei voi sanoa näin kapeakatseisesta näkökulmasta kuin mitä tässä tutkimuksessa on esitetty. Opettaja tekee lisäksi aina oppimateriaalista omat tulkintansa ja käsittelee tunneilla merkityksellisimmiksi kokemansa asiat sopivassa järjestyksessä ja hyväksi katsomallaan tavalla. Yhtäsuuruusmerkin ymmärtäminen on merkityksellistä jatko-opintojen kannalta, varsinkin yhtälöiden opiskelussa. Jos siis pitäisi tämän sekä aiemman tutkimuksen valossa valita näistä kahdesta oppikirjasarjasta se, joka esittelee laajemmin yhtäsuuruutta ja haastaa paremmin sen perinteisen operationaalisen tulkinnan, kallistuu vaaka Tuhattaiturin puolelle. Vaikka erot eivät olleet suuria eikä niiden merkittävyyttä testattu, sisälsi Tuhattaituri enemmän tehtäviä, joissa yhtäsuuruusmerkki esiintyi muussa muodossa kuin ”anna vastaus”.

8.2 Muita huomioita oppikirjoista

Oppikirja-analyysin yhteydessä erottui joukosta myös muutama epätavallisempi tehtävä, joissa yhtäsuuruuden käsite ei esiinny toivotulla tavalla. Kuvassa 8.1 on esimerkki tällaisesta tehtävästä. Kunkin laskutoimituksen vastaus tulee laittaa nuolen osoittamaan ruutuun ja tästä ruudun vastauksesta alkaa puolestaan seuraava laskutoimitus. Jos tämän tehtävän laskutoimitukset olisi merkitty peräkkäin eikä allekkain, näyttäisi tehtävä tältä: $64 : 8 \rightarrow \square : 4 \rightarrow \square \cdot 9 \rightarrow \square$. Tällä tavalla aseteltuna tehtävä muistuttaa kovasti laskutoimitusketjua $64 : 8 = 8 : 4 = 2 \cdot 9 = 18$, jossa yhtäsuuruus ei säily, vaan väitetään itse asiassa, että pitäisi paikkansa, että luvut 8, 2 ja 18 ovat yhtä suuria. Tällaisten tehtävien vaarana on se, että oppilas omaksuu vastaavan merkintätavan myös yhtälönratkaisuun. Toisaalta Li et al. (2008) kuitenkin toteavat tämän tyyppisten tehtävien mahdollisesti auttavan yhtäsuuruusmerkin väärän käytön havaitsemisessa. Siten on hyvin paljon opettajan ohjauksesta kiinni, miten tällaiset tehtävät vaikuttavat käsitykseen yhtäsuuruudesta. Opettajan oppaan puolella tähän tehtävätyyppiin ei ollut opetusvinkkejä, mutta ehkä kannattaisi olla. Tuhattaituri 5a opettajan oppaassa huomautettiin, että yhtälöiden ketjutusta ei tule hyväksyä. Ketjutusvirheitä kohdattaessa tutkijat Knuth et al. (2006) ehdottavat nostamaan opetuskeskustelussa esiin yhtäsuuruusmerkin oikean käytön. Kuvan kaltaisia tehtäviä on Kympissä muutama ja vastaavia löytyy myös Tuhattaiturista, tosin hieman vähemmän. Nämä on kuitenkin laskettu mukaan tutkimuksen kategorian V tehtäviin.



Kuva 8.1: Tehtävä, jossa ei ole yhtäsuuruusmerkkiä, mutta laskutoimitukset ovat ketjussa. Teoksesta Open Kymppi 3 syksy, sivu 102.

Huomion kiinnittivät myös tehtävät, joissa yhtäsuuruusmerkin sijaan on käytetty sanaa ”on”, kuten alaluvussa 6.2.2 esitetyn kuvan 6.31 tehtävässä. Näitä oli Kymppi 1 syksy -kirjassa vain pari, mutta huolestuttavaa on se, että tehtävät esiintyvät heti matematiikan opintojen alkutaipaleella. Tässä tehtävässä lasketaan yhteenlaskuja, mutta termin ”on yhtä suuri kuin” sijaan on käytetty vain lyhennystä ”on”. Heikkous on siinä, että vaikka tehtäviä on kirjassa vain pari, saattavat oppilaat alkaa lukea yhtäsuuruusmerkin on-merkkinä heti matematiikan opintojen alussa. Ikäheimo et al. (1998) korostavat, että alusta asti tulisi puheessa käyttää oikeaa terminologiaa ja Ikäheimo (1997), että ”on”-merkin sijaan tulisi puhua yhtäsuuruusmerkistä.

Lisäksi varsinkin Tuhattaiturin kategoria IV sisälsi hyvin paljon alaluvussa 6.1.1 esitellyn kuvan 6.11 kaltaisia tehtäviä, joissa jokin luku on korvattu kuvalla. Tämän tyyppiset tehtävät ovat kuitenkin ristiriidassa tutkijoiden Carpenter et al. (2003) ja Ikäheimo (1997) ehdotuksiin siitä, ettei symbolitasoa ja konkretian tasoa tulisi tehtävissä sekoittaa, varsinkaan laskuoperaatioiden opetteluvaiheessa. Näitä tehtäviä oli molemmissa oppikirjoissa heti 1. luokan syksyn kirjoissa, mutta Tuhattaiturissa Kymppiin verrattuna noin kaksinkertainen määrä. Tehtävätyyppinä tällainen lukujen korvaaminen symbolein voi kuitenkin olla hyvä ja erityisesti Kympin puolella alussa tehtävänannoissa pyydettiin muun muassa selvittämään, mikä luku on piilossa sangossa. Parempi lähestymistapa tämäntyyppisiin tehtäviin olisi kuitenkin erityisesti Tuhattaiturin opettajan oppaassa esillä ollut lisätehtävä, jossa opettaja kirjoittaa jonkin yhtälön taululle ja peittää paperiarkilla yhden luvun, jota oppilaat sitten ratkovat.

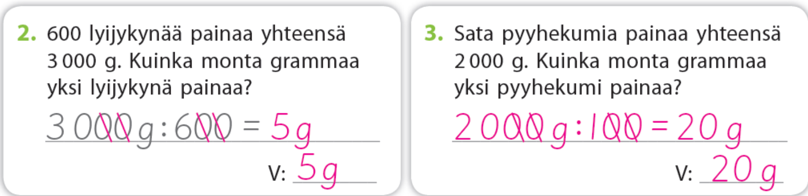
8.3 Tutkimuksen luotettavuus

Tämän tutkimuksen eräs rajoitus on se, että tutkijoita oli vain yksi. Muissa vastaavissa tutkimuksissa, kuten McNeil et al. (2006), Li et al. (2008) ja Pursiainen & Suontakanen (2016), tutkijapari tai -ryhmä on pystynyt kriittisemmin arvioimaan muun muassa kategoriajakoa ja tehtävien sijoittumista näihin kategorioihin. Schreierin (2012) mukaan tällainen kaksoiskoodaus on myös olennainen osa kvantitatiivisen sisällönanalyysin luotettavuutta. Koska tämä ei ollut tässä tutkimuksessa mahdollista, on kvantitatiivisen datan luotettavuutta pyritty lisäämään muun muassa virheiden eliminoimisella, jodonmukaisuudella ja stabiiliudella. (Schreier, 2012)

Tutkimuksen kategoriajakoon liittyen luotettavuutta olisi lisännyt myös se, että työssä olisi käytetty täsmälleen samaa kategoriajakoa jonkin aiemman tutkimuksen kanssa, esimerkiksi kirjoittajien Pursiainen & Suontakanen (2016) samankaltaisen pro gradu -tutkielman tai vaikkapa tutkijoiden Li et al. (2008) tutkimuksen kanssa. Näin tuloksia olisi pystynyt tarkemmin vertailemaan myös tutkimusten välillä. Schreier (2012) kuitenkin toteaa myös, että valmiiden analyysimallien käyttäminen ei välttämättä sovi juuri kyseisen tutkimuksen tutkimuskysymyksiin. Tämän vuoksi aiemmat kategoriajaot otettiin huomioon, mutta niitä muokattiin hieman.

Luotettavuutta olisi lisännyt myös se, jos tehtävät olisi jaoteltu useampaan kategoriaan kuin vain yhteen. Nyt yksi yhtälö määrättiin vain yhteen kategoriaan, vaikka se olisi sisältänyt useamman yhtälön. Tähän liittyen myös prioriteettijärjestys oli tutkijan itse kehittämä järjestelmä yhtälöiden jakamiseksi kategorioihin. Tätä tutkimusta varten kehitetty prioriteettijärjestys suosi varsinkin kategorioiden II_a ja II_b osumia. Kuitenkin, koska tutkimuksen päätarkoitus oli selvittää, millaisen kuvan yhtäsuuruudesta oppikirjat antavat, oli myös luontevaa, että näitä epätodennäköisempiä yhtälötyyppejä nostettiin materiaalista esiin. Jos tehtävässä on yksikin muotoa II_b oleva yhtälö, tarkoittaa se, että sellainen yhtälö todella kirjassa on. Tämän lisäksi eräs rajoite oli se, että murtoluvut tulkittiin operaatioina eikä lukuina, joten ne myös lisäsivät kategorian II_b esiintymiskertojen määriä.

Yhden silmäparin rajoite koski myös tutkimusaineiston kirjaamista, sillä 24 kirjan aineistossa oli yli 8000 tutkimukseen soveltuvaa tehtävää. Jokin tehtävistä on siis saattanut yksinkertaisesti lipsahtaa näppäilyvirheen takia väärään kategoriaan. Tiedot kerättiin käsin laskentataulukkoon, joten on riski, että jokin luku on mennyt vahingossa väärälle riville tai väärään sarakkeeseen. Tätä pyrittiin estämään lisäämällä rivien loppuun sarake, jossa laskettiin kunkin tehtävätyypin tehtävät yhteen ja varmistettiin, että tämä summa vastasi alussa laskettua sarakkeen "tutkimuksen tehtävät" lukua. Lisäksi tällaisten virheiden minimoimiseksi aineisto käytiin kolmeen kertaan läpi ja tehtävät myös numeroitiin hyvin tarkasti. Tutkimuksen toistettavuuden varmistamiseksi tässä tutkimuksessa käytetty tehtäväkohtainen kategoriajako on esiteltynä työn liitteessä 1. Ensimmäisen tarkistuskierroksen jäljiltä 32 tehtävää otettiin mukaan tutkimukseen, näistä suurin osa tuli kategoriaan V, johon päätettiin lisätä muun muassa rahatehtävät. Lisäksi 25 tehtävää vaihtoi kategoriaa, näistä suurin osa siirtyi kategorian $\mathrm{II_b}$ murtolukutehtäviin muun muassa kategorian $\mathrm{I_b}$ sanallisista tehtävistä. Jälkimmäisellä tarkistuskierroksella vielä 8 tehtävää vaihtoi kategoriaa. Näistä suurin osa oli laitettu vahingossa kategoriaan $\mathrm{I_b}$, vaikka tehtävä kuului itse asiassa kategorian $\mathrm{I_b}$, kuten kuvassa 8.2. Tyypillisesti tehtävän ympärillä oli useampi kategorian $\mathrm{I_b}$ tehtävä, jonka vuoksi myös kyseinen tehtävä oli epähuomiossa mennyt tähän kategoriaan.


2. 600 lyijykynää painaa yhteensä 3 000 g. Kuinka monta grammaa yksi lyijykynä painaa?

$3\,0\cancel{00}\,g : 6\cancel{00} = 5\,g$

V: 5 g

3. Sata pyyhekumia painaa yhteensä 2 000 g. Kuinka monta grammaa yksi pyyhekumi painaa?

$2\,0\cancel{00}\,g : 1\cancel{00} = 20\,g$

V: 20 g

Kuva 8.2: Vieretysten olevat kategorioiden $\mathrm{I_a}$ ja $\mathrm{I_b}$ yhtälötehtävät. Teoksesta Open Kymppi 4 kevät, sivu 82.

Tutkimuksessa selvitettiin tehtävien lukumääriä, mutta vielä tarkempi tarkastelu olisi sisältänyt yhtäsuuruusmerkkien esiintymiskertojen lukumäärät. Kuten todettiin, tehtävistä osa sisälsi jopa kymmeniä laskutehtäviä, kun toiset sisälsivät vain yhden. Jos siis tarkastellaan yhtäsuuruusmerkin esiintymiskertoja, on todennäköistä, että molemmissa kirjasarjoissa kategorian $\mathrm{I_a}$ -osuus lisääntyisi huomattavasti, sillä erityisen paljon laskuja oli nimenomaan tässä kategoriassa, kuten kuvan 6.1 tehtävästä nähdään. Tämä tutkimus ei myöskään anna vastausta siihen, miten kaikissa Suomen ala- ja yläkouluissa yhtäsuuruutta ja yhtälöitä opetetaan, eikä edes siihen, miten kaikissa oppikirjoissa yhtäsuuruus esitellään. Tämä johtuu siitä, että tutkimukseen on valittu vain rajallinen määrä oppikirjasarjoja. Esimerkiksi alakoulun oppikirjasarjoja valikoitui tutkimukseen vain kaksi, vaikka kirjasarjoja on lisäksi ainakin Sanoma Pron Milli ja Edukustannuksen YyKaaKoo.

8.4 Ehdotuksia jatkotutkimukselle

Tässä tutkimuksessa tarkastelin laajasti alakoulun matematiikan oppikirjojen yhtälökategorioita ja niiden osuuksia niin vuositasoittain kuin kokonaisuutena sekä oppikirjoittain että kirjasarjoittain. Aineiston pohjalta pyrin hahmottamaan, millaisen kuvan oppikirjat antavat yhtäsuuruudesta ja yhtäsuuruusmerkistä. Lisäksi tutkin yhtälöiden määritelmiä sekä opettajan oppaiden vinkkejä yhtäsuuruuden ja yhtälöiden opettamiseen. Näiden havaintojen pohjalta pyrin myös luomaan täydentävän oppimateriaalin yhtäsuuruuden opettamiseen.

Tätä tutkimusta täydentäisi hyvin luomani oppimateriaalin testaaminen käytännön opetustilanteessa interventiotutkimuksen kautta. Erityisen kiinnostavaa olisi selvittää, miten hyvin lapset oppivat yhtäsuuruuden. Interventiotutkimusta voisi myös laajentaa kehittämistutkimukseksi, jossa oppimateriaalia paranneltaisiin kunkin tutkimussyklin päätteeksi. Tutkimuksen osana tai erillisenä tutkimuksena voisi selvittää lasten käsityksiä yhtäsuuruudesta sekä sitä, muuttuvatko ne oppitunnin aikana. Tätä voisi laajentaa seurantatutkimukseksi, jossa vertailukohdat voisivat olla ennen oppituntia, oppitunnin jälkeen, kuukauden kuluttua ja esimerkiksi kolmen tai kuuden kuukauden kuluttua. Mielenkiintoista olisi myös selvittää opettajien käsityksiä yhtäsuuruudesta ja yhtäsuuruusmerkistä sekä niiden merkityksestä. Vertailun kohteena voisivat olla esimerkiksi esiopettajat, alakoulun ja yläkoulun matematiikan opettajat ja miksei myös lukion matematiikan opettajat. Opettajan uskomukset ja näkemykset vaikuttavat Gonzalez Thompsonin (1984) mukaan siihen, miten hän opettaa, joten tämän vuoksi myös tämä näkökulma olisi kiinnostava. Opettajilta voisi myös samassa yhteydessä kysyä, toimisiko suunnittelemani oppituntimateriaali heidän mielestään yhtäsuuruuden opetukseen ja miten he mahdollisesti materiaalia kehittäisivät. Olisi myös kiinnostavaa selvittää laajemmin 7. luokalle saapuvien oppilaiden käsityksiä yhtäsuuruudesta ja yhtäsuuruusmerkistä samaan tapaan kuin esimerkiksi tutkijat Knuth et al. (2006) ja McNeil & Alibali 2005a). Voisi tutkia, korreloivatko nämä tulokset oppilaiden käyttämään alakoulun oppikirjasarjaan. Löytyisikö tuloksista tämän tutkimuksen tuloksia tukevia havaintoja siitä, että Tuhattaiturin tehtävät ohjaisivat yhtäsuuruuden relationaalisempaan ymmärrykseen kuin Kympin. Voisi myös tutkia samojen tulosten korrelaatiota juuri näiden oppilaiden alakoulun opettajien käsityksiin yhtäsuuruudesta ja sen merkityksestä.

Koska tutkimuksessa keskityttiin alakoulun oppikirjojen yhtälöihin, voisi mielenkiintoinen lisätutkimusaihe olla vastaava tutkimus yläkoulun oppikirjojen yhtälöistä. Tässä yhteydessä voisi käyttää yhtälökategorioina esimerkiksi tutkijoiden Filloy & Rojano (1989) jakoa aritmeettisiin ja algebrallisiin yhtälöihin, jota Vlassis (2002) on täydentänyt neljään kategoriaan. Myös Attorpsin (2006) jako identtisiin sekä ehdollisiin yhtälöihin voisi toimia tässä yhteydessä. Yhtäsuuruusmerkin ymmärrystä tutkiessa jako operationaaliseen ja relationaaliseen ymmärrykseen ei tutkijoiden Rittle-Johnson et al. (2011) mukaan riitä, vaan he ehdottavat jakoa neljään tasoon.

8.5 Johtopäätökset

Tutkimuksen päätulos on se, että esiopetuksen, ala- ja yläkoulun oppikirjoissa ei juurikaan oteta huomioon yhtäsuuruutta ja sen merkitystä. Yhtäsuuruusmerkin relationaaliseen ymmärtämiseen ei myöskään kehoteta kiinnittämään huomiota esiopetuksen, ala- tai yläkoulun opettajan oppaissa. Esiopetuksen kirjoissa saatetaan jättää laskutoimitukset ja yhtäsuuruusmerkki kokonaan esittelemättä, kuten Seikkailujen eskarissa. Kuitenkin Esiopetuksen laskutaito otti esille niin yhteen- kuin vähennyslaskut, mutta kaikki yhtälöt olivat standardimuodossa. Alakoulun oppikirjoissa yhtäsuuruusmerkistä ei myöskään luoda kovin monipuolista kuvaa tehtävätyyppien valossa, sillä suurin osa tehtävistä kuuluu standardiyhtälöiden luokkaan, jossa operaatiot ovat yhtälön vasemmalla puolella. Alakoulun oppikirjoista Tuhattaituri-sarjassa on jonkin verran Kymppi-sarjaa enemmän aritmeettisille laskuille tyypillisen yhtäsuuruusmerkin operationaalisen käsityksen haastavia tehtävätyyppejä ja myös opettajan oppaassa otetaan useammin esiin yhtäsuuruus ja muistutetaan sen ominaisuudesta kahden yhtä suuren asian osoittajana. Alakoulun oppikirjoista Tuhattaituri myös esittelee yhtälöitä jonkin verran Kymppiä enemmän ja myös syvällisemmin.

Yläkoulun oppikirjoissa yhtäsuuruuden käsitteen vahvistamiseen käytetään vaakamallia. Kaikki kolme kirjasarjaa Kuutio, Pii ja Säde ottavat ensin käsittelyyn yhtälöiden ratkaisemisen päättelyn kautta käyttäen havainnollistuksena vaakamallia. Vasta näiden jälkeen siirrytään varsinaisiin yhtälötehtäviin. Opettajan oppaissa ei kuitenkaan korosteta sitä, miksi näin tehdään ja miten yhtäsuuruusmerkin ymmärrys vaikuttaa oppilaiden yhtälönratkaisutaitoihin. Myös yhtälöiden määritelmien sanamuodot poikkeavat kirjojen välillä jonkin verran. Oppikirjoista Säteessä ja Kuutiossa määritelmät ovat yhden lauseen pituiset ja Piissä kahden lauseen. Vain Pii mainitsee määritelmässä myös yhtäsuuruusmerkin, vaikka toisaalta sen mainitseminen ei ole yhtälön määritelmän kannalta mitenkään välttämätön.

Kaiken kaikkiaan tämä tutkimus osoittaa aiemman tutkimuksen valossa, että yhtäsuuruusmerkkiin ja sen opetukseen tulisi kiinnittää niin alakoulun kuin yläkoulun oppikirjoissa enemmän huomiota ja tehtävissä olisi hyvä tarjota vieläkin monipuolisempi kuva yhtäsuuruudesta. Tämä auttaisi oppilaita siirtymässä aritmetiikasta algebraan. Myös opettajan oppaissa voitaisiin paremmin perustella yhtäsuuruuden merkitystä niin ala- kuin yläkoulun puolella. Käytössä oleva oppimateriaali vaikuttaa opettajan opettamiseen (Vermeulen & Meyer, 2017), joten opettajille olisi hyvä tarjota tukea opettajan oppaissa myös yhtäsuuruuden käsitteen osalta.

Viitteet

Alexandrou-Leonidou, V., & Philippou, G. (2007). Elementary school students' understanding and use of the equal sign. Teoksessa D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (toim.), *Proceedings of the fifth congress of the european society for research in mathematics education (CERME 5)* (s. 825–834).

Asquith, P., Stephens, A. C., Knuth, E. J., & Alibali, M. W. (2007). Middle school mathematics teachers' knowledge of students' understanding of core algebraic concepts: Equal sign and variable. *Mathematical Thinking and Learning*, *9*(3), 249–272.

Attorps, I. (2005). Secondary school teachers' conceptions about algebra teaching. Teoksessa *Fourth congress of the european society for research in mathematics education. sant feliu de guíxols, spain. retrieved october* (osa 5, s. 2005).

Attorps, I. (2006). *Mathematics teachers' conceptions about equations.* University of Helsinki.

Attorps, I., & Tossavainen, T. (2007). Is there equality in equation. *European Research In Mathematics Education 5*, 2250–2259.

Bednarz, N., Radford, L., Janvier, B., & Lepage, A. (1992). Arithmetical and algebraic thinking in problem-solving. Teoksessa W. Geeslin & G. K. (toim.), *Proceedings of the 16th conference of the international group for the psychology of mathematics education (PME-16)* (s. 65–72).

Behr, M., Erlwanger, S., & Nichols, E. (1980). How children view the equals sign. *Mathematics Teaching*, *92*(1), 13–15.

Booth, J. L., Barbieri, C., Eyer, F., & Paré-Blagoev, E. J. (2014). Persistent and pernicious errors in algebraic problem solving. *The Journal of*

Problem Solving, *7*(1), 3.

Burgin, M. (2018). Mathematical analysis of the concept equality. *Research and Reports on Mathematics*, *2*(2).

Byrd, C. E., McNeil, N. M., Chesney, D. L., & Matthews, P. G. (2015). A specific misconception of the equal sign acts as a barrier to children's learning of early algebra. *Learning and Individual Differences*, *38*, 61–67.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school.* Heinemann.

Clapham, C., & Nicholson, J. (2014). *The concise oxford dictionary of mathematics* (5. p.). Available at `https://www.oxfordreference.com/view/10.1093/acref/9780199679591.001.0001/acref-9780199679591` (2020/03/23). OUP Oxford.

Claxton, G. (2002). Minitheories: a preliminary model for learning science. Teoksessa *Children's informal ideas in science* (s. 59–75). Routledge.

Dräger, M. (2015). *Matikkaluotsi: matematiikkavaikeuden tunnistaminen ja kuntouttava opetus* (1. p.). Helsinki: ELLI Early Learning Oy.

Etelämäki, H., Koppatz, N., Laitinen, A., Lammi, P., & Nieminen, J. (2015). *Säde 1, matematiikka* (1. p.). Helsinki: Edita.

Falkner, K. P., Levi, L., & Carpenter, T. P. (1999). Children's understanding of equality: A foundation for algebra. *Teaching children mathematics*, *6*(4), 232.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the learning of mathematics*, *9*(2), 19–25.

Forsback, M., Kalliola, A., Tikkanen, A., & Waneus, M.-L. (2015). *Tuhattaituri 1a opettajan opas* (5. p.). Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Otava.

Furness, A., & Kiuru, V. (2000). *Matikkapolkuja: toiminnallista matematiikkaa 5–7-vuotiaille.* Helsinki: Tammi.

Gonzalez Thompson, A. (1984). The relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(2), 105–127.

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for research in Mathe-*

matics Education, 116–140.

Haapasalo, L., & Kadijevich, D. (2000). Two types of mathematical knowledge and their relation. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *21*(2), 139–157.

Hakkarainen, K., Lipponen, L., & Lonka, K. (2004). *Tutkiva oppiminen. järki, tunne ja kulttuuri oppimisen sytyttäjinä.* Wsoy.

Hannula, J. (2014). Matematiikan kuusi osaa: David Tallin matematiikan kolmen maailman viitekehyksen laajentaminen Juha Oikkosen matematiikan kaksilla kasvoilla. *LUMAT (2013–2015 Issues)*, *2*(1), 59–68.

Häsä, J. I. A., & Rämö, J. (2013). *Johdatus abstraktiin algebraan.* Gaudeamus Helsinki University Press.

Hassinen, S., Latva, O., & Makkonen, J.-P. (2016). *Kuutio 7* (9. uudistettu painos p.). Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Hattikudur, S., & Alibali, M. W. (2010). Learning about the equal sign: Does comparing with inequality symbols help? *Journal of experimental child psychology*, *107*(1), 15–30.

Heinonen, M., Luoma, M., & Mannila, L. (2012). *Pii 7.* Kustannusosakeyhtiö Otava.

Hellsten, E. L., Saari, H., Tienhaara, M., & Uus-Leponiemi, T. (2014). *Esiopetuksen laskutaito [uudet numerot]* (3.–9. p.). Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational studies in mathematics*, *27*(1), 59–78.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*, *2*, 1–27.

Hihnala, K. (2005). Laskutehtävien suorittamisesta käsitteiden ymmärtämiseen: peruskoululaisen matemaattisen ajattelun kehittyminen aritmetiikasta algebraan siirryttäessä. *Jyväskylä studies in education, psychology and social research*(278).

Ikäheimo, H. (1997). *Iloa ja ymmärrystä matematiikkaan* (3. p.). Helsinki: Opperi.

Ikäheimo, H., Aalto, A., & Puumalainen, K. (1998). *Opi matematiikkaa* *leikkien esi- ja alkuopetuksessa* (2. p.). Helsinki: Opperi.

Junnila, H. (2011). Johdatus diskreettiin matematiikkaan. *Luentomoniste, luettu*, *30*, 2012.

Kiviluoma, P., Nyrhinen, K., Perälä, P., Rokka, P., Salminen, M., & Tapiainen, T. (2017). *Tuhattaituri 5a opettajan opas* (Uudistetun laitoksen 1. p.). Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Otava.

Kiviluoma, P., Nyrhinen, K., Perälä, P., Rokka, P., Salminen, M., & Tapiainen, T. (2018a). *Tuhattaituri 6a opettajan opas* (1. p.). Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Otava.

Kiviluoma, P., Nyrhinen, K., Perälä, P., Rokka, P., Salminen, M., & Tapiainen, T. (2018b). *Tuhattaituri 6b opettajan opas* (1. p.). Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Otava.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A., & Stephens, A. C. (2005). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence & variable. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *37*(1), 68–76.

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for research in Mathematics Education*, 297–312.

Ko, Y.-Y., & Karadag, Z. (2013). Fostering middle school students' relational thinking of the equal sign using geogebra. *Online Submission*, *3*(3), 45–49.

Lassila, K., Marttila, V., Salminen, M., & Kolu, S. (2016). *Seikkailujen eskari: matikka.* Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Otava.

Li, X., Ding, M., Capraro, M. M., & Capraro, R. M. (2008). Sources of differences in children's understandings of mathematical equality: Comparative analysis of teacher guides and student texts in china and the united states. *Cognition and Instruction*, *26*(2), 195–217.

Linnanmäki, K. (1997). Minäkäsitys ja oppiminen. Teoksessa *Matematiikkanäkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (s. 283–300). Niilo Mäki-instituutti.

McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2005a). Knowledge change as a function of mathematics experience: All contexts are not created equal. *Journal* *of Cognition and Development*, *6*(2), 285–306.

McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2005b). Why won't you change your mind? knowledge of operational patterns hinders learning and performance on equations. *Child development*, *76*(4), 883–899.

McNeil, N. M., Grandau, L., Knuth, E. J., Alibali, M. W., Stephens, A. C., Hattikudur, S., & Krill, D. E. (2006). Middle-school students' understanding of the equal sign: The books they read can't help. *Cognition and instruction*, *24*(3), 367–385.

Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook.* sage.

Mirin, A. (2019). The relational meaning of the equals sign: A philosophical perspective. Teoksessa *Proceedings of the 22nd annual conference on research in undergraduate.*

Näveri, L. (2009). *Aritmetiikasta algebraan: Muutoksia osaamisessa peruskoulun päättöluokalla 20 vuoden aikana.* Helsingin yliopisto.

Nienstedt, W. (toim.). (1995). *Tautiluokitus ICD-10.* Helsinki: Sosiaali- ja terveysalan tutkimus- ja kehittämiskeskus.

Opetushallitus. (2014a). *Esiopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014.*

Opetushallitus. (2014b). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014.*

Pernaa, J. (2013). Kehittämistutkimus tutkimusmenetelmänä. Teoksessa J. Pernaa (toim.), *Kehittämistutkimus opetuksessa* (s. 9–26). PS-kustannus.

Powell, S. R. (2012). Equations and the equal sign in elementary mathematics textbooks. *The Elementary school journal*, *112*(4), 627–648.

Pursiainen, R., & Suontakanen, T. (2016). *Millaisia yhtälöitä matematiikan oppikirjat sisältävät? Sisällönanalyysi kolmen kirjasarjan vuosiluokkien 1–3 opettajan oppaista* (Julkaisematon pro gradu -tutkielma). Oulun yliopisto.

Rinne, S., Salonen, M., Sintonen, A.-M., & Uus-Leponiemi, T. (2016). *Open kymppi 5 kevät* (1. p.). Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Rinne, S., Salonen, M., Sintonen, A.-M., & Uus-Leponiemi, T. (2017). *Open kymppi 1 syksy* (4.–5. p.). Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Rittle-Johnson, B., Matthews, P. G., Taylor, R. S., & McEldoon, K. L.

(2011). Assessing knowledge of mathematical equivalence: A construct-modeling approach. *Journal of Educational Psychology*, *103*(1), 85.

Räsänen, P. (2012). Dyscalculia. *Duodecim: lääketieteellinen aikakauskirja*, *128*(11), 1168–1177.

Ryan, J., & Williams, J. (2007). *Children's mathematics 4-15: learning from errors and misconceptions*. McGraw-Hill Education (UK).

Schreier, M. (2012). *Qualitative content analysis in practice*. Sage publications.

Sherman, J., & Bisanz, J. (2009). Equivalence in symbolic and nonsymbolic contexts: Benefits of solving problems with manipulatives. *Journal of Educational Psychology*, *101*(1), 88.

Star, J. R., Pollack, C., Durkin, K., Rittle-Johnson, B., Lynch, K., Newton, K., & Gogolen, C. (2015). Learning from comparison in algebra. *Contemporary Educational Psychology*, *40*, 41–54.

Stephens, A. C., Knuth, E. J., Blanton, M. L., Isler, I., Gardiner, A. M., & Marum, T. (2013). Equation structure and the meaning of the equal sign: The impact of task selection in eliciting elementary students' understandings. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(2), 173–182.

Tall, D. (2004). Thinking through three worlds of mathematics. *International Group for the Psychology of Mathematics Education.*

Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics*. Cambridge University Press.

Tuomi, J. (2018). *Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi* (Uudistettu laitos p.). Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Tammi.

Tynjälä, P. (1999). *Oppiminen tiedon rakentamisena: konstruktivistisen oppimiskäsityksen perusteita*. Kirjayhtymä.

Vermeulen, C., & Meyer, B. (2017). The equal sign: teachers' knowledge and students' misconceptions. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, *21*(2), 136–147.

Vlassis, J. (2002). The balance model: Hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown. *Educational Studies in Mathematics*, *49*(3), 341–359.

Tutkimuksen oppikirjat

Etelämäki, H., Koppatz, N., Laitinen, A., Lammi, P., & Nieminen, J. (2015). *Säde 1, matematiikka* (1. p.). Helsinki: Edita.

Forsback, M., Kalliola, A., & Tikkanen, A. (2016). *Tuhattaituri 2b opettajan opas* (3. p.). Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Otava.

Forsback, M., Kalliola, A., Tikkanen, A., & Miia-Liisa, W. (2015). *Tuhattaituri 1a opettajan opas* (5. p.). Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Otava.

Forsback, M., Kalliola, A., Tikkanen, A., & Miia-Liisa, W. (2016). *Tuhattaituri 2a opettajan opas* (3. p.). Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Otava.

Forsback, M., Kalliola, A., Tikkanen, A., & Waneus, M.-L. (2015). *Tuhattaituri 1b opettajan opas* (1.–4. p.). Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Otava.

Hassinen, S., Latva, O., & Makkonen, J.-P. (2016). *Kuutio 7* (9. uudistettu painos p.). Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Heinonen, M., Luoma, M., Mannila, L., Rautakorpi-Salmio, K., Tapiainen, T., Tikka, T., & Urpiola, T. (2019). *Pii 7 – matematiikka: Opettajan aineisto* (7. p.). Kustannusosakeyhtiö Otava.

Hellsten, E. L., Saari, H., Tienhaara, M., & Uus-Leponiemi, T. (2014). *Esiopetuksen laskutaito [uudet numerot]* (3.–9. p.). Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Kiviluoma, P., Nyrhinen, K., Perälä, P., Rokka, P., Salminen, M., & Tapiainen, T. (2015). *Tuhattaituri 3b opettajan opas* (3. p.). Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Otava.

Kiviluoma, P., Nyrhinen, K., Perälä, P., Rokka, P., Salminen, M., & Tapiainen, T. (2016a). *Tuhattaituri 4a opettajan opas* (1. p.). Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Otava.

Kiviluoma, P., Nyrhinen, K., Perälä, P., Rokka, P., Salminen, M., & Tapiainen, T. (2016b). *Tuhattaituri 4b opettajan opas* (1. p.). Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Otava.

Kiviluoma, P., Nyrhinen, K., Perälä, P., Rokka, P., Salminen, M., & Tapiainen, T. (2017a). *Tuhattaituri 5a opettajan opas* (Uudistetun laitoksen 1. p.). Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Otava.

Kiviluoma, P., Nyrhinen, K., Perälä, P., Rokka, P., Salminen, M., & Tapiainen, T. (2017b). *Tuhattaituri 5b opettajan opas* (1. p.). Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Otava.

Kiviluoma, P., Nyrhinen, K., Perälä, P., Rokka, P., Salminen, M., & Tapiainen, T. (2018a). *Tuhattaituri 6a opettajan opas* (1. p.). Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Otava.

Kiviluoma, P., Nyrhinen, K., Perälä, P., Rokka, P., Salminen, M., & Tapiainen, T. (2018b). *Tuhattaituri 6b opettajan opas* (1. p.). Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Otava.

Kiviluoma, P., Nyrhinen, K., Perälä, P., Rokka, P., Salminen, M., & Tapiainen, T. (2019). *Tuhattaituri 3a opettajan opas* (Uudistetun laitoksen 1. p.). Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Otava.

Lassila, K., Marttila, V., Salminen, M., & Kolu, S. (2016). *Seikkailujen eskari: matikka*. Helsingissä: Kustannusosakeyhtiö Otava.

Rinne, S., Salonen, M., Sintonen, A.-M., & Uus-Leponiemi, T. (2016a). *Open kymppi 1 kevät* (4. uud. p.). Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Rinne, S., Salonen, M., Sintonen, A.-M., & Uus-Leponiemi, T. (2016b). *Open kymppi 2 kevät* (4. uud. p.). Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Rinne, S., Salonen, M., Sintonen, A.-M., & Uus-Leponiemi, T. (2016c). *Open kymppi 5 kevät* (1. p.). Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Rinne, S., Salonen, M., Sintonen, A.-M., & Uus-Leponiemi, T. (2016d). *Open kymppi 5 syksy* (1. p.). Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Rinne, S., Salonen, M., Sintonen, A.-M., & Uus-Leponiemi, T. (2017a). *Open kymppi 1 syksy* (4.–5. p.). Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Rinne, S., Salonen, M., Sintonen, A.-M., & Uus-Leponiemi, T. (2017b). *Open kymppi 2 syksy* (4.–5. p.). Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Rinne, S., Salonen, M., Sintonen, A.-M., & Uus-Leponiemi, T. (2017c). *Open kymppi 3 kevät* (3. uud. p.). Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Rinne, S., Salonen, M., Sintonen, A.-M., & Uus-Leponiemi, T. (2017d). *Open kymppi 3 syksy* (3. uud. p.). Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Rinne, S., Salonen, M., Sintonen, A.-M., & Uus-Leponiemi, T. (2017e). *Open kymppi 4 kevät* (4. uud. p.). Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Rinne, S., Salonen, M., Sintonen, A.-M., & Uus-Leponiemi, T. (2017f). *Open kymppi 4 syksy* (5. uud. p.). Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Rinne, S., Salonen, M., Sintonen, A.-M., & Uus-Leponiemi, T. (2017g). *Open kymppi 6 kevät* (1. p.). Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Rinne, S., Salonen, M., Sintonen, A.-M., & Uus-Leponiemi, T. (2017h). *Open kymppi 6 syksy* (1. p.). Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Tuhattaituri 1a

Kategoria	Yht	Tehtävät
I_a	66	10:2,K2; 11:4,7,K1; 12:4,7,K1; 13:K2; 14:K2; 15:1,2,3,6,K1,K2; 16:2,5,K2; 17:K2; 18:K2; 19:4,R2; 20:K2; 21:3,K2; 22:2,3,K2; 23:7,K2; 24:2,4,K1; 25:4,K1; 26:K1; 27:2,3,R2; 28:7,K1; 32:7,K2; 35:4; 36: K1; 37:3,K2; 38:4,K2; 39:2,K2; 40:1,2,K1,K2; 41:3,6,K2; 42:4,5,K1,K2; 43:4,R2,R3
I_b	41	10:1,3,K1; 11:2; 12:2; 13:1,4,K1; 14:K1; 16:1,K1; 17:2,K1; 18:1,2,K1; 19:2,3,5; 20:2; 21:1,K1; 22:1,K1; 23:2; 24:1; 26:4; 27:5; 28:2; 32:2,9; 36:2; 37:1,4,K1; 39:1,6,K1; 40:6; 42:3; 43:3
I_c	21	29:1,3,4,K2; 30:1,2,K2; 31:4,K1; 33:1,2,3,4,K1; 34:1,2,K2; 35:6,7,R3; 36:5
II_a	14	10:5; 13:3,5; 20:4,7; 23:4; 26:3; 27:R5; 28:4; 32:4; 39:3; 40:3; 43:5,R4
II_b	16	11:8; 12:8,9; 13:7; 15:7; 16:7; 23:9; 25:5; 26:9; 28:9; 29:5; 30:7; 31:6; 32:8; 35:R4; 42:2
III_a	0	
III_b	0	
III_c	20	7:2,3,4,5,6,K1; 8:2,3,4,5,6,K1,K2; 9:5,6,R3,R5; 17:3; 34:8; 38:6; 7:2,3,4,5,6,K1; 8:2,3,4,5,6,K1,K2; 9:5,6,R3,R5; 17:3
IV	21	13:2,8; 14:5,6; 15:8; 16:3,8; 17:6; 19:R4; 20:9; 21:6; 23:10; 24:6; 26:10; 28:10; 30:8; 34:7; 37:5; 40:7; 41:7; 42:7
V	55	2:5; 10:4; 11:3; 12:3; 14:3; 15:5; 16:4; 17:1,5; 18:4,6; 19:1,R1,R3; 20:3,8; 21:2,4,5; 22:4,6; 23:3,8; 26:1,2,5,8; 27:4,R4; 28:3,8; 29:2,K1; 30:3,6,K1; 32:3; 34:3,6,K1; 35:5,R2,R5; 36:3,6; 37:2; 38:5,K1; 39:4,5; 40:4,5; 42:1,6; 43:1

Tuhattaituri 1b

Kategoria	Yht	Tehtävät
I_a	106	1:1,2,5,K1; 2:2,3,K1; 3:7,K2; 4:K2; 5:K1; 6:2,K1; 7:2,3,K1; 8:2,3,6,K1; 9:1,6,R1; 10:2,4,K2; 11:3,5,K1; 12:2,3,5,K1,K2; 13:2,K1; 14:2,K2; 15:2,K1; 16:2,K2; 17:3,5,K2; 18:K2; 19:2,3,4; 22:6; 26:3; 28:3,K2; 29:2,3,5,K1,K2; 30:2,K2; 31:2,3,K2; 32:K2; 33:2,3,K2; 34:3; 35:1,K1; 36:K2; 37:1,2,3; 38:1,5,K1,K2; 39:1,2,4,6,K1; 40:1,5,K1; 44:1,2,3,4,6,K1; 45:1,2,3,5,K2; 46:2,3,6,K2; 47:1,2,R1,R3,R5
I_b	35	1:7; 10:5; 13:1,K2; 14:K1; 15:1,K2; 16:K1; 18:K1; 19:6; 30:1,K1; 31:K1; 32:1,2,K1; 33:K1; 34:K1; 35:2,6,7; 36:1,2,3,5,K1; 37:5; 38:3; 39:3; 40:2,3,7; 46:5,K1; 47:4
I_c	18	1:4; 2:4; 4:6; 6:3,K2; 9:R4; 10:3,K3; 16:4; 19:R1,R2; 25:4; 28:2; 31:4; 35:3; 37:6; 38:2; 39:8
II_a	5	5:3; 14:3; 16:3; 21:6; 43:5
II_b	16	1:8; 8:7; 9:8; 13:3; 19:5; 28:4,7; 29:7; 30:7; 31:7; 33:8; 34:K2; 37:4; 38:7; 45:4; 47:5
III_a	7	12:1,6; 14:1; 16:1; 29:1; 31:1; 33:1
III_b	0	
III_c	11	1:3; 13:4; 29:4; 36:4; 42:1,2,4,5,K1; 44:7; 45:6
IV	10	5:6; 6:8; 16:7; 18:7; 24:5; 31:9; 32:7; 35:4; 37:R5; 43:6
V	74	1:10; 2:7,8,10; 3:6; 6:6,7; 7:6,7; 9:4,R3; 10:6,7,8,K1; 11:8; 12:4,7; 13:5,7,8; 14:5,7; 15:3,5,6,7; 16:5,6; 17:1,2,7,K1; 18:3,4,5,6; 19:R3; 20:5; 23:3; 25:5; 28:1,5,6,8,K1; 30:8; 31:1; 32:3,5; 33:4; 34:4,6; 36:7; 37:R2; 38:6,8,9; 39:7; 40:4,9; 41:2,5; 42:3,K2; 43:3,4; 44:8; 45:7,K1; 46:4,7; 47:3,R4

Tuhattaituri 2a

Kategoria	Yht	Tehtävät
I_a	104	1:2,3,4,K1; 3:4,K2; 5:1,2,3,5,K1,K2,K3; 6:1,2,3,K1,K2,K3; 7:1,2,3,4,K1,K2; 8:1,2,4,K1,K2; 9:2,3,K2; 10:1,2,4; 11:1,3,K2; 12:2,3,5,K1,K2; 13:1,2,3,8,K1; 15:1,2,K1; 16:2,3,5,K1,K2; 17:1,2,3,4,K1; 18:2,5,K2; 19:2,4,6,R5; 21:1,4,K2; 22:1,4,K2; 24:1,K2; 25:3,4; 26:2,4,K1; 27:1,2,3,5,K1; 28:2,K2; 29:3,R3; 30:3,K2; 32:K2; 33:K2; 35:4,K2; 36:R3; 37:5,K2; 38:K2; 39:K2; 42:K2; 44:2
I_b	50	3:2; 4:4; 5:4,7; 6:4,7; 7:6; 9:1,K1; 10:6,3***; 11:; 13:4; 15:4,5,K2; 16:6; 17:5; 18:1,7,K1; 19:7; 20:1,2,6,K1; 21:2,3,8,10; 22:2,3,7,9; 23:4; 24:2,3; 25:1,2,4,K1; 26:5; 27:; 28:1,K1; 29:1,5,7; 37:K1; 38:K1; 43:6; 44:5
I_c	21	1:5; 10:1***; 11:2,K1; 15:3,6; 16:; 17:8; 18:4; 19:1,3,R1,1***; 24:4; 25:; 26:; 27:8; 28:3,5; 29:4; 30:; 31:K2; 34:K2; 35:K3; 36:5
II_a	1	35:6
II_b	10	1:7; 3:5; 8:6; 11:7; 25:6; 27:7; 35:8,9; 36:6,4***
III_a	8	12:1; 16:1; 20:3,K2; 21:6; 26:1,3; 29:2
III_b	0	
III_c	5	2:4; 10:5,4***; 19:3***; 29:6
IV	15	1:9; 6:8; 8:7; 10:7; 12:7; 14:4; 16:7; 21:9; 22:8; 24:10; 29:R4,1***; 34:5; 39:6; 44:R4

V	98	1:1,6,8; 2:8; 3:1,3,6,K1; 4:3,6,7; 5:8; 7:5,7; 8:5; 9:5,6; 10:4,5,2***,6***; 11:5,6,8; 12:4; 13:6,7; 14:3,6; 15:8; 16:4; 17:6,7; 18:6,8,9; 19:R2,R4,2***,4***; 20:4,5; 21:7; 22:6; 23:6,7; 24:6,7,8,9,; 25:5,7; 26:6,7; 27:4,9; 28:4,6; 29:R5,2***,3***; 30:4,6,7,K1; 31:1,2,3,4,5,K1; 32:1,2,3,4,5,K1; 33:5; 34:6; 35:1,2,5,7,10,K1; 36:1,2,7,R1,1***,2***,3***,5***,6***; 39:5,7; 44:2***,3***

Tuhattaituri 2b

Kategoria	Yht	Tehtävät
$\mathrm{I_a}$	83	1:6,K2; 3:K2; 4:K2; 5:K2; 6:K2; 7:2,3; 8:K2; 10:1,K2; 11:1,2,3,K2,K3; 12:K2; 13:1,K2; 14:1,2,3,K2,K3; 15:3; 16:3,4,5,K1; 17:3,5,K2; 18:4,5; 19:3,K2; 20:1,2,3,5,K1,K2; 22:1,2,3,K1,K2; 23:K1; 27:2,K2; 28:1,4; 33:K1; 35:1,2,3,4,6,K1,K2; 36:1,2,3,4,6,K1,K2; 37:1,2,3,4,K2; 38:6,R3; 39:K2; 41:K2; 44:2,K2; 46:4,K1,K2; 47:3,R4
$\mathrm{I_b}$	43	2:2,K1; 10:2,3; 11:4,5,K1; 12:4; 13:2,3; 14:4,5,K1; 15:1,2,K1; 16:1,2,6; 17:1,4,K1; 18:2,3,7; 19:1,7,K1; 20:4,6; 22:5; 32:1,3,K1; 37:5,K1; 39:2; 40:4,K1; 41:K1; 42:K1; 44:K1; 46:3
$\mathrm{I_c}$	24	2:4,K2; 10:5; 13:5; 18:6; 21:1,2,3,4,K1,K2; 28:3,R1,2***,4***; 30:K1; 38:1,3; 46:1,2; 47:4,5***
$\mathrm{II_a}$	10	29:1,3,K1,K2; 31:1,2,K1,K2; 32:K2; 44:4
$\mathrm{II_b}$	14	2:7,8; 7:5; 10:8; 13:8; 14:7; 15:7; 18:R2,2***; 38:1***; 39:5; 43:5,K1; 46:8
$\mathrm{III_a}$	0	
$\mathrm{III_b}$	3	40:2,3,K2
$\mathrm{III_c}$	12	28:6***; 34:1,2,K2; 37:6; 38:4,5; 40:7; 42:2,K2; 46:7; 47:4***
IV	14	10:9; 15:5; 18:R5,4***; 19:5; 20:7; 21:5; 22:8; 27:7; 28:7***; 32:6; 33:5; 42:7; 43:3
V	128	2:5,6,9; 7:1,6,7,K1; 9:R5,4***; 10:7; 11:6,8; 12:3,5; 13:6,7,9; 15:8,9; 16:7,8; 17:7,8; 18:R1,R4,1***,3***,5***,6***; 19:2,4,6; 21:6; 22:4,7; 23:3,6; 24:1,2,3,4,5,6,K1,K2; 25:1,2,3,4,5,6,K1,K2; 26:1,2,3,4,5,6,K1,K2; 27:1,3,4,5,6,K1; 28:5,6,7,R2,R4,1***,3***,5***; 29:2,5,7; 30:2,7,8; 31:6,7; 32:2,5; 34:3,5,K1; 35:7; 36:7,8; 37:7,8; 38:R1,2***,3***,4***; 39:6; 40:1,6,8; 41:3,5; 42:1,5,6; 43:4,6; 44:1,3,6,7; 45:3,5,6; 46:6,9; 47:1,2,5,R1,R2,R3,R5,1***,2***,3***,6***

Tuhattaituri 3a

Kategoria	Yht	Tehtävät
$\mathrm{I_a}$	55	1:2,4,K1; 2:1,3,K1; 13:4; 14:1,1*,1**,2***,R1,R6; 16:3,6,7,K1; 17:3,6,8,K1; 18:4,6,K1; 19:4,6,7,K1; 20:2,K1; 21:4,6,K1; 22:4,6,K1; 23:4,6,K1; 25:3,8,K1; 26:K1; 27:2,2*,3*,4*,1**,1***,R2; 28:K1; 35:R1; 44:1; 45:2,K1
$\mathrm{I_b}$	47	3:5,K3; 13:K2,K3; 14:8,5*,5**,5***; 15:1,5,K3; 16:9,K2; 17:7,K2; 18:5,K2; 19:5,K2; 20:3,K2; 21:5,K2; 22:5,K2; 23:5,K2; 25:2,K3; 26:K2; 27:1,4,1*,6*; 28:6; 30:6; 31:6; 41:3,K2; 43:5; 44:8; 45:4,6,K2; 46:4; 47:3,K1
$\mathrm{I_c}$	7	1:7; 8:3; 14:6**,4***,6***,R3; 27:R4
$\mathrm{II_a}$	11	3:2,3,K1,K2; 14:2,3,2*,3*,2**,3**,R4
$\mathrm{II_b}$	12	16:12; 17:12; 18:10; 19:10; 21:9; 23:11; 25:6; 27:3**,4**,2***; 45:8
$\mathrm{III_a}$	22	1:5,6,K2; 2:4,5,K2; 15:2,3,K1; 24:2,3,4,5,K1,K2; 25:4,K2; 27:3,5,5*,2**; 45:3
$\mathrm{III_b}$	0	
$\mathrm{III_c}$	3	3:4; 13:K1; 14:4
IV	21	1:10; 2:8; 3:11; 6:4; 9:4; 11:4; 12:3; 15:4,9,K2; 20:5,6; 22:7,9; 27:5**,3***,4***,R5,R6; 35:3*; 44:7
V	183	1:1,3,9,11; 2:2; 3:6,7,9,10; 4:1,2,3,K1,K2; 5:1,2,K1,K2; 6:1,2,3,7,K1,K2; 7:1,2,3,6,K1,K2; 8:1,2,4,6,K1,K2; 9:1,2,3,K1,K2; 10:1,2,6,K1,K2; 11:1,2,3,K1,K2; 12:1,2,K1,K2; 14:5,6,7,4*,4**,1***,R5; 15:6,8,10; 16:2,5,8,10,11; 17:2,5,10,11,13; 18:2,3,7,9,11; 19:2,3,9; 20:1,4,7; 21:2,3,8; 22:2,3,8,10; 23:2,3,8,9,10; 24:1,6,7; 26:3,4,5; 27:R1; 28:1,2,3,4,5,K2; 29:1,2,3,5,K1,K2; 30:1,2,4,5,7,K1,K2; 31:1,2,3,4,K1; 32:1,2,3,5,K1,K2; 33:1,2,3,K1,K2; 34:K1,K2; 35:1,2,3,1*,2*,1**,2**,3**,4**,1***,2***,3***,4***,R3,R4,R5; 39:7; 41:1,2,5,K1; 42:K2; 43:4,4*,4**,2***,4***,R3; 44:2,3,4,5,K1; 45:1,5,9; 46:1,2,3,K1,K2

Tuhattaituri 3b

Kategoria	Yht	Tehtävät
$\mathrm{I_a}$	27	3:4; 5:4; 6:2,K1; 7:3,1**,4**; 9:4; 10:3,K2; 11:4,5; 12:K1; 13:2,4,1*,2*,2**,3**,R3,R5; 14:6; 29:4; 45:1,6,8,K1
$\mathrm{I_b}$	97	2:2,3,4,5,6,K1,K2; 3:3,5,8,K1,K2; 4:1,2,K1,K2; 5:1,2,3,K1,K2; 6:1,3,5,K2; 7:1,2,4,1*,2*,5*,1***,2***; 10:1,2,6,K1; 11:2,K1; 13:1,1**,R4,R7; 24:3,K3; 26:3,K2; 27:3; 29:2,7,K2; 30:2,4,K2; 31:2; 32:7,8,5*,5**,3***,R3; 40:1,2,6,K1; 42:1,2,3,4,K1; 43:2,3,4,K1; 44:2,3,4,5,2*,3*,4*,2**,4**,2***,R3; 45:2,7,11,K2; 47:2,5,K1; 48:2,3,5,K1,K2
$\mathrm{I_c}$	4	6:4; 7:2**; 13:R6; 32:4**

II_a	6	1:6; 8:1; 13:3***; 16:1,K1; 18:2
II_b	59	5:7; 7:3***; 8:5,K1; 11:7; 12:4; 16:5; 17:1,2,3,K1,K2,K3; 18:4,K3; 19:1,2,3,4,5,7,8,K1; 20:1,2,3,4,5,7,K1,K2,K3; 21:1,3,4,5,K1,K2; 22:4,K1; 23:4,5,6,7,3*,5*,1**,3**,1***,2***,3***,R5; 45:4,9; 46:5,6,8,K1,K2
III_a	21	8:3,6,8,9,K2; 11:6,K2; 13:5,6,3*,4*,4**; 19:K2; 22:K2; 23:2**,3***; 27:2; 28:K2; 32:6,4*; 45:5
III_b	1	25:3
III_c	11	25:2; 26:5; 28:5; 29:5; 32:4,5,3*,2**,3**,2***,R5
IV	9	2:7; 5:6; 11:9; 13:5; 17:6; 20:9; 21:8,9; 46:8
V	76	1:3; 2:8; 3:6; 4:3,4,5; 5:5; 7:3*,4*,3**,4***; 8:2,4,7,10; 9:1,2,3,5,6,7,K1,K2; 10:4,5,7; 11:1,3,8; 12:3,5; 13:3,1***,2***,4***,R1,R2; 16:6,7; 17:7,8; 19:9; 21:2,7; 23:4*,4***,5***,R4; 24:5,6; 25:6,7,8; 26:6,7; 27:2,4,5,6,7; 29:6; 30:1,5,6,7,8,K1; 31:1,6; 32:4***,R2; 40:3; 45:3,12; 46:4,9

Tuhattaituri 4a

Kategoria	Yht	Tehtävät
I_a	47	1:1,2,3,K1; 3:1,K1; 4:2,K1; 8:4,6; 10:1; 12:1,4*; 13:4,K2; 16:2; 17:1; 19:1*,3*; 21:6; 25:K1; 27:2,4; 29:1,2,6; 30:2,K1; 31:3,7,K1; 32:6; 33:5; 35:2,8; 36:K1; 37:1,3,1*,1**,R2,R3; 48:1
I_b	53	1:4,5,K2; 2:3,4,K2; 3:3,4,K2; 4:4,5,7,K2; 5:8; 6:7; 7:7; 8:5; 10:5; 12:2**,3***,R5; 19:4***; 20:6; 23:6; 24:6; 27:1,3,7,K1,K2; 28:1,2,3,4,5,6,K1,K2; 29:3,K2; 30:1,3,4,K2,K3; 35:1; 37:2,2*,R4; 46:5; 47:2; 48:3,K2
I_c	5	1:9; 4:3; 26:4***; 28:9; 37:2***
II_a	10	13:3,K1; 16:1,3,K1; 19:1,1**; 26:1,1*,1**
II_b	4	3:6; 7:4; 17:8; 30:8
III_a	136	5:1,2,3,4,5,K1,K2; 6:2,3,6,K1,K2; 7:1,2,3,K1,K2; 8:1,2,3,K1; 9:1,2,K1,K2; 10:2,K1,K2; 11:3,K1,K2; 12:3,4,5,6,1*,2*,3*,1**,3**,4**,1***,R1,R2; 17:2,3,4,5,9,K1,K2; 18:1,2,3,K1,K2; 19:3,4*,2**,3**,1***,2***; 23:1,2,3,K1; 24:1,3,K1; 26:3,4,6,3*,4*,5*,3**,4**,2***,3***; 29:4,9,K1; 30:5,7; 31:1,2,4,K2; 32:1,2,3,8,K1,K2; 33:1,3,4,K1,K2; 34:1,3,4,9,K2; 35:3,4,6,7,K1,K2; 36:5,K2; 37:4,5,6,7,8,3*,4*,5*,2**,3**,4**,1***,3***,4***; 46:1,2,4,K1,K2; 47:K1; 48:2,4,9,K1
III_b	0	
III_c	8	13:1,2,5,K3; 19:2,2*; 21:5; 27:6
IV	17	1:8,1; 5:10; 6:4; 8:7; 9:7; 11:4; 12:2***; 18:6; 25:4; 26:R5; 29:8; 30:10; 33:7; 36:6; 37:R6; 48:7
V	96	1:6; 2:8; 3:2,5,7,8; 4:1; 5:6,9; 6:1,5; 7:5; 9:3,4,6; 10:6; 11:6; 12:2,4***,R3; 13:6,10,11; 14:1,2,3,4,6,K1,K2; 15:1,2,4,5,6,K1,K2; 16:4,5,7,8,K2; 17:6; 18:4,7; 19:4,5*,4**,3***; 20:1,2,K1,K2; 21:1,2,K1,K2; 22:1,2,3,4,5,6,K1,K2; 23:5; 24:2; 25:K2; 26:2,5,2*,2**,1***,R3,R4; 27:8; 29:5; 30:6,9; 31:5,6,8,9; 32:4,5; 34:5,7; 35:10; 36:4; 37:R5; 47:1,3,4,7,K2; 48:8

Tuhattaituri 4b

Kategoria	Yht	Tehtävät
I_a	59	3:K2; 15:1,2,3,4,5,K1,K2; 16:1,2,3,4,K1,K2; 17:5,6,10,K1,K2; 22:8; 24:4,3*,2**,R6; 25:4,K2; 27:4,K2; 29:6,K1; 30:K2; 31:4; 32:1,2; 33:2,K1; 34:K1; 35:5,4*,3**; 39:1,K1; 40:1,K1; 41:3,K1; 43:3; 44:K1; 45:2,2*,1**,1***,R4; 47:4,K1; 48:3,K1; 49:3,K1
I_b	33	25:5; 26:5,3; 27:5; 28:K2; 29:K2; 30:K3; 31:K2; 33:4; 34:5,K2; 35:6,5*,2***; 39:2,4,6,K2; 40:2,4,8,K2; 41:5,9; 43:7; 45:6,4*,2**,2***; 48:4,K2; 49:4,11
I_c	7	15:9; 16:9; 24:2***; 35:R3; 40:7; 47:10; 48:9
II_a	4	20:3; 24:1***; 35:1***; 40:3
II_b	39	1:5,K2; 2:5; 3:3,4,6,K1,K3; 4:1,2,3,4,K1; 5:1,2,3,K1,K2; 6:1,4,9; 7:1,2,3,4,5,6,K1,K2,K3; 8:8; 12:2,3,5,6,3*,4*,2***,3***,R1; 46:3,4
III_a	59	4:5,6,K2,K3; 5:5,K3; 6:2,3,5,6,K1,K2; 8:1,2,3,4,5,K1,K2,K3; 9:1,2,3,4,5,7,K1,K2; 10:1,2,3,4,K1,K2; 11:K1,K2; 12:4,7,8,9,2*,5*,2**,3**,1***; 28:3; 29:9; 31:5; 35:4**; 46:2,5,6,8,K1,K2,K3
III_b	22	18:2,3,K1,K2; 22:2; 25:1,3,K1; 27:3,K1; 29:1,4,5; 31:1,2; 33:1; 35:1,2,1*,R1; 47:3; 48:2
III_c	34	2:K2; 11:4; 12:R6; 14:9; 17:8; 19:1,2,3,8,K1,K2; 22:3; 23:5; 24:3,2*,1**,R3; 25:8; 30:4; 35:3*,2**,R2; 38:1,2,3,4,K1,K2; 41:4; 43:4; 45:3,3*; 47:2; 49:2
IV	4	2:4; 3:7; 9:8; 16:6

V	145	1:8; 2:2,6,7,8; 3:5,8,9,10; 4:7,9,10; 5:4,6,7,8,9; 6:7; 7:; 8:6; 9:9; 10:5,6,8; 11:3,6,7; 12:1*,1**,4***,R2,R4,R5; 13:6; 14:10; 15:6; 16:7; 17:9; 18:5,K3; 19:5,6,7,; 20:1,2,4,K1,K2; 21:1,2,4,5,K1,K2; 22:4,5,6,7,9,K1; 23:3,4,K1,K2; 24:5,6,4*,5*,3**,4**,3***,4***,R4,R5; 25:2,6,7,9,10; 26:8; 27:1,2,6,7; 28:4,5,6; 29:7,10,11; 30:3,6; 31:6,7,8,9; 32:4,5,6,K2; 33:5,6,7,8,9,K2; 34:4,6; 35:3,7,6*,7*,5**,6**,3***,4***,5***,R4,R5,R6,R7; 37:3; 38:7; 39:3,5; 40:5,6; 41:8,10.; 42:6; 44:4,5,6,7; 46:1,10.; 47:5,6,7,11,K2; 48:1,6,7; 49:7,8

Tuhattaituri 5a

Kategoria	Yht	Tehtävät
I_a	43	1:1,5,9,K1; 2:1,2,K1; 3:1,8,K1; 27:2,3,K1; 28:2,3,K1; 30:3,4,K1; 31:2,3,K1,K2; 32:2,3,6,K1; 34:1,2,3,K1; 35:2,4; 36:K1; 37:2,3,2*,3*,4*,1**,2**; 53:3,K1
I_b	40	1:2; 2:3,7; 5:9; 13:2***; 21:3,4,K1,K2; 22:2,3,K1; 23:1,2,3,K1,K2; 24:K2; 25:6,7,4*,3***; 34:4,K2; 35:1; 36:K2; 40:3; 41:4; 42:5,K2; 44:3,7; 45:5; 46:6; 47:3; 48:2; 51:5,K3; 52:4,K2
I_c	24	1:6; 3:2; 6:1,2,4,K1,K2; 7:1,2,3,K1; 8:5,7,K1,K3; 13:3,4,1*,3*,; 34:7; 36:4; 37:3***; 51:4; 52:10
II_a	13	37:1; 42:9; 44:2,K2; 48:1; 49:3,K2; 50:5,3*,2**,3***; 54:3,K2
II_b	25	14:2,3,4,5,K1,K2,K3; 15:1,7; 16:1,9; 17:1,2,3; 18:2,K1; 19:7; 20:4; 24:5; 25:2**,3**,2***; 32:8; 34:8; 52:K3
III_a	67	1:3,4,K2; 2:4,5,K2; 3:3,4,K2,K3; 15:2,3,4,K1; 16:2,3,4,K1,K2; 17:5,6,9,K1; 18:3,4,K2; 19:1,2,3,4,K1,K2; 20:1,2,K1,K2; 23:4; 24:K1; 25:1,2,3,4,5,1*,2*,3*,1**,1***; 27:1,K2; 28:1,K2; 30:5,K2; 32:1,K2; 37:5,3**,2**; 39:6; 52:1,2,3,6,K1; 53:4,K2
III_b	0	
III_c	3	26:4; 27:10; 53:2
IV	10	1:8; 2:8; 6:5,9; 14:11; 17:11; 20:7; 24:4; 28:9; 35:9
V	128	1:7; 2:6; 3:5,6; 4:8,11,K2; 5:1,2,3,4,5,6,8,10,K1,K2; 6:3,6,K3; 8:1,2,6,13,K2; 9:4,5,9,10,K2; 10:1,3,7,9,K1; 11:1,5,6,8,K1; 12:K2; 13:1,5,2*,1**,3**,1***,3***; 14:7,10.; 15:6,8; 16:7,8; 17:4,8; 18:1,5; 19:5,6,8; 20:5,6; 21:1,2,8,9; 22:1,6,7; 25:4***; 26:6; 27:7; 28:5,7; 29:1,3,6,K1,K2; 30:6,8,10; 31:1,4,5,7; 32:5,7,9,10; 33:1,3,4,5,6,K1,K2; 34:5,6,9,10; 35:3,6,8,10,K1,K2; 36:3,5; 37:4,5*,4**,4***; 38:4,8; 45:2; 48:4,5,6; 50:7; 51:3,10,11; 52:9,11; 54:8,1

Tuhattaituri 5b

Kategoria	Yht	Tehtävät
I_a	23	3:3,6,8; 4:1,2,3,K1; 6:4; 7:1; 8:1; 9:1,5; 10:1; 12:5,3*; 25:2,K2; 29:3,K3; 36:1; 47:2,4,K2
I_b	47	4:2; 7:2,K1; 8:K1; 9:6,K1; 10:K2; 11:K2; 12:7; 25:1,4,5,K1,K3; 27:3,K2; 28:1,4,; 32:1,2,4,7,8,K1,K2; 33:6,10,11; 35:8,K1; 36:2,1*,5**,6**,4***; 40:K2; 42:3; 44:K1; 46:6,5*,4**,3***; 47:K3; 49:2,4,K1; 50:5
I_c	2	21:7; 29:8
II_a	2	29:2,K2
II_b	2	4:6; 6:8
III_a	77	2:8; 3:K1,K2; 5:1,6,7,K1,K2; 6:5,K1; 10:2,K1; 11:K1; 12:4,6,4***; 17:1,2,3,K1,K2; 18:2,6,K1,K2; 19:3,6,K2; 20:1,K1,K2; 21:3,4,K1; 22:1,3,K1; 23:K1,K2; 24:5,6,7,3*,4*,2**,3**,1***; 26:1,4,5,6,K1,K2,K3; 27:1,4,K3; 28:5,6,K2,K3; 36:3,7,8,3*,2**; 41:3,4,K1; 44:3; 47:3,K1; 48:3,4,K1,K2; 49:K2
III_b	47	13:4,5,K2; 14:3,4,5,K2,K3; 15:1,2,3,4,5,K1,K2,K3; 16:1,2,3,4,5,7,K1,K2,K3; 18:1,4; 19:1,2,4,5,K1; 21:1,3; 22:2; 23:3; 24:1,2,3,4,1*,2*,1**; 48:1,2,5,6
III_c	3	14:7; 29:6; 48:9
IV	5	2:10; 8:5; 9:9; 10:6; 11:4
V	109	1:4,5,6,9,K3; 2:5,6,7,; 3:2,7; 4:5,7,8,9; 5:2,5; 6:1,2,7,9,10,11; 7:3; 8:4,7,8; 9:4,7,8; 10:4,5; 11:5,6; 12:1,2,3,2*,1**,2**,1***,2***,5***; 13:8,9,10; 14:2,9,10; 15:7,8,10; 16:9; 17:5,6,7; 18:8; 19:7,8,9; 20:4; 21:6,8; 22:4,5,6,7; 23:4,5; 24:2***,3***; 25:3,10,11; 26:7,11; 27:9; 28:12; 30:8; 31:9; 32:12; 33:9; 38:1,2,3,6,K1; 39:7; 40:4; 41:2; 42:2,7; 43:3,5; 44:4,5; 46:2,4*,2**,2***; 47:1,7,9,10; 48:8,1; 49:1,11; 50:2,8

Tuhattaituri 6a

Kategoria	Yht	Tehtävät
I_a	38	1:8; 2:3; 3:2; 4:2; 5:7; 7:1; 21:6; 24:5,6; 25:4; 26:1,6; 27:1,2,3,K1,K2; 28:1,2,3,4,5,K1; 29:3; 31:6; 32:1; 33:2; 34:1,K1; 35:K1; 36:1,2,2*,3*; 51:1,5,11,K1
I_b	16	1:1,5,K1; 2:7,10.; 3:1,K1; 8:7; 11:7; 29:2; 36:7; 38:1,6,K1; 39:1,K1
I_c	7	4:8; 14:6; 19:8; 25:6; 26:8; 27:7; 29:1
II_a	1	6:3
II_b	13	8:1; 9:7; 12:1,2,K1,K2; 13:4; 14:1; 15:1,2,4,K1,K2

III_a	137	1:2,K2; 2:1,2,K1; 4:1,3,K1; 5:1,2,K1,K2; 6:1,2,4,5,K1; 7:3,4,K2; 8:2,3,K1; 9:1,3,5; 10:K1,K2; 11:1,2,3,4,5,6,2*,3*,1**; 12:3,4,6,K4; 13:2,3,K1,K2; 14:2,3,K2; 16:1,3,5,K1,K2,K4; 17:1,3,5,K1; 18:1,2,4,K1,K2; 19:1,2; 20:1,2,K1; 21:1,2; 22:K1; 23:1,2,4,5,6,1*,3*,4*,5*,1**,3**,1***; 24:1; 25:1; 26:2; 29:2; 30:2,3,K1; 31:2,4,K1; 34:2,3; 36:3,4,5*,6*,1**,2**,1***; 40:1,K1; 42:1,2,4; 44:1; 45:1,2,K1; 46:4,5,K2; 47:4,K1; 48:1,4,5,6,2*,3*,2**,3**,4**,2***,3***; 49:2,3; 50:1,2,3,4; 51:3; 52:1,2,4
III_b	0	
III_c	0	
IV	9	2:9; 11:3**,3***; 18:8; 22:6; 23:4**; 25:8; 28:11; 33:5
V	105	1:4,6,7,9; 2:6; 3:4,6,7; 4:5,6,7; 5:4; 6:7,8,10; 7:2,7,8; 8:5,6,9; 9:10; 10:3; 13:1,5,6; 14:7,8,9,10; 15:3,5,8,10; 16:6; 17:6,7,9; 18:6; 19:5,6,7; 20:4,7; 21:5,7; 22:; 23:3,2*,2***,3***; 24:2,4,7; 25:2,7,9,10; 26:3,5,7,9; 27:5,6; 28:8,9,10,12,13,K2; 29:5,6,7 ; 30:1,5,6,8; 31:1; 32:4,5,7,8; 33:4,7,8; 34:7,8,10; 35:4,6; 36:6,8; 41:2,5,8; 43:6,7; 45:6; 49:6,7,8; 50:6; 51:2,7,8,9

Tuhattaituri 6b

Kategoria	Yht	Tehtävät
I_a	8	12:2,K1; 26:1,K1; 40:2,5; 44:1,7
I_b	110	110 3:1,2,K1,K2; 4:1,2,K1; 6:3; 7:2,K1; 8:1,2,K1; 9:1,3,K1; 10:K1; 11:2,3,6,2*,3*,5*,2**,3***; 14:1,2,3,K1,K2; 15:1,2,3,4,7,K1,K2; 16:2,K1,K3; 18:1,2,K1; 19:1,2,3,5,K1; 20:1,2,K1,K2; 21:1,2,K1,K2; 22:7,K1; 23:3,4,5,7,8,1*,2*,4*,1**,2**; 27:1,2,3,4,6,7,8,10,K1,K2; 28:1,2,3,4,5,10,K1,K2; 29:4,6,8,K2; 33:11; 34:6,7; 35:2,3,2*,3*,2**,3**,5***; 36:6; 40:7; 48:2,3,6; 49:2,3,K1; 50:4,5
I_c	35	30:1,2,3,4,5,6,K1,K2; 31:1,2,3,4,5,6,7,9,10,K1,K2; 33:1,4,5,K1; 34:3,K2; 35:7,8,5*,5**,2***; 41:8; 44:9; 50:6,10,K2
II_a	3	6:10; 19:9; 41:1
II_b	7	30:10; 31:12; 33:6,10.; 42:7; 43:1; 45:5
III_a	88	1:5; 2:5,K2; 6:1,2; 11:1,5; 12:1,4,6,K2,K4; 13:1,2,3,K1,K2; 16:1,3,4,5,9; 17:1,2,7,K1; 18:3,4; 23:1,2,6,3*,3**,1***; 38:1,2,K1,K2; 39:1,2,K1; 40:1,4,K1; 41:2,3,5,7,K1,K2; 42:1,2,3,4,9,K1,K2; 43:2,3,5,K1,K2; 44:2,3,5,K1,K3; 45:1,2,K1; 46:1,2,3,4,K1; 47:3,4,5,6,7,2*,3*,4*,5*,2**,3**,4**; 49:5
III_b	11	1:4,9,10; 2:3,4,9,10,K1; 11:1*,1**; 48:1
III_c	31	8:7; 12:5,K3; 32:1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,K1,K2; 33:2,3,7,8,9,K2; 35:9,10,6*,6**,3***,4***; 41:9; 50:7,9,K3
IV	2	30:8; 31:8
V	73	1:2,3,7,11; 2:1,2,8; 3:7; 4:7; 5:1,2,5,6,K1,K2; 6:5,8,K2; 7:4,6,8; 8:4; 9:4,5,6; 10:3,5; 11:4, 4*,1***; 12:3,7,8; 13:5,8; 14:5,6,7,8; 15:6,8,10; 16:10; 18:6,9,10; 20:7,8,10; 21:6,7; 22:5,6; 23:4**,5**,3***,4***; 30:9; 31:11; 39:7; 41:6; 42:6; 43:7,8,; 45:8; 46:5; 48:5,8,K1; 49:1,6,7,10

Kymppi 1 syksy

Kategoria	Yht	Tehtävät
I_a	70	11: 3,K2; 12: 3,K2; 13: K2; 14: 3,K2; 15: 3,K2; 16: 3,K2; 17: 3,4,K2; 18: 3,K2; 20: T1; 21: 3,4,K2; 22: 3,5; 24: 3,4,K2; 25: 1,K2; 26: 1,K1,K2; 27: 3,4,5,7,K2; 28: 2,3,K1,K2; 29: 4,K2; 30: 2,3,5,K2; 32: K2; 34: 3,K2; 35: 3,4,K2; 36: 3,5,K2; 37: 4,K2; 39: 1,2; 40: 2,5,K2; 41: 1,K2; 42: 3; 46: K2; 47: 5; 48: 4,K2; 49: 4,K2
I_b	62	11: 1,2,4,K1; 12: 1,2,K1; 14: 1,2,4,K1; 15: 1,2,K1; 16: 1,2,K1; 18: 1,2,K1; 20: T2,T3; 22: 1,2,4,K1; 23: 1,2,3,K1; 25: 2,K1; 26: 2; 28: 1; 31: 5; 33: T2,T4; 34: 2; 35: 1,2,K1; 36: 1,2,K1; 37: 1,2,K1; 40: 4; 41: 2,3; 42: 1,4; 43: 5; 44: T3,T4,T5; 46: K3; 47: 4,K2; 48: 1; 49: 2,K1
I_c	25	19: 1,2,3,4,5,K1,K2; 20: T4; 29: 2; 30: 1,K1; 32: 1,2,K1; 33: T1; 38: 1,2,3,K1,K2; 39: K2; 44: T1; 45: K2; 48: 2,K1
II_a	2	22: 6; 47: 1
II_b	2	24: 7; 47: 7
III_a	0	
III_b	0	
III_c	13	6: 2; 7: 2,3,K2; 8: T4; 31: 2,3,4,K1,K2; 33: T3; 47: 2,K1
IV	8	14: 5; 17: 7; 20: P2; 25: 5; 28: 6; 32: 5; 39: 5; 48: 5
V	73	3: 4; 5: 6,7; 9: 6,7; 10: 1,2,3,4,5,K1,K2; 11: 5; 12: 4,5; 13: 1,2,3,K1; 15: 4; 16: 4,5; 17: 5,6; 18: 4,5; 21: 5; 23: 4; 24: 5,6; 25: 3,4; 26: 3,4,5; 28: 4,5; 29: 3,5,K1; 30: 4,6; 31: 7; 32: 3,4; 34: 1,4,5,6,K1; 35: 5,6; 36: 4,6; 37: 3,5; 38: 4; 39: 3,4,K1; 40: 3,6,K1; 41: 4,5,K1; 43: 4; 45: K1; 47: 6; 48: 3; 49: 1,3,5

Kymppi 1 kevät

Kategoria	Yht	Tehtävät
I_a	166	1: 4,5,7,K2; 2: 1,3,4,6,K2; 3: 3,K2; 4: 3,4,5,8,K1,K2; 5: 3,4,5,7,K1,K2; 6: 3,K2; 7: 3,4,K2; 8: 4,5,K1,K2; 9: 4,5,K2; 10: 3,4,K2; 11: T1; 12: 2,3,4,6,K1,K2; 13: 1,2,3,4,5,K1; 14: 1,3,4,K1,K2; 15: 1,2,3,5,K1; 16: 1,2,3,4,K1,K2; 17: 3,K2; 18: 3; 19: T1; 20: 1,2,3,4,K1,K2; 21: 1,2,3,K1; 22: 1,2,3,4,K1; 23: 3,4,K1,K2; 24: 1,2,3,4,6,K1,K2; 25: 3,4,K2; 26: 3,K2; 27: T1; 28: 3,5; 29: 3,5; 30: 3,K2; 31: 4,K2; 32: 3,5,K2; 33: 3,5,K2; 34: 4,6,K2; 35: T1; 37: 4; 39: 4; 40: 6,K1,K2; 41: K1,K2; 42: 1,2,K1; 43: 1,2,3,K1,K2; 44: 1,2,3,K1,K2; 45: 1,2,4,5,7,K1,K2; 46: 4; 47: T1; 48: K1,K2; 50: 1,2,5,K1,K2; 51: 1,2,4,K1,K2; 52: 1,3,K1,K2
I_b	54	3: 1,2,K1; 6: 1,2,K1; 7: 1,2,K1; 8: 6; 9: 6; 10: 1,2,K1; 11: T4,T5; 12: 5; 13: 6; 14: 2,5; 16: 5; 17: 1,2,5,K1; 18: 1,2,5,K1; 19: T2,T3,T4; 20: 5; 23: 1,2,5; 24: 5,7; 25: 1,2,5,K1; 26: 1,2,5,K1; 27: T2,T3,T4; 43: 4; 44: 4; 50: 3; 51: 3,5
I_c	0	
II_a	0	
II_b	2	51: 6; 52: 5
III_a	0	
III_b	0	
III_c	13	9: 3,K1; 37: 1,2,3,K1,K2; 39: 1,2,3,K1,K2; 47: T2
IV	8	3: 6; 6: 6; 8: 9; 13: 7; 16: 6; 21: 5; 44: 5; 50: 6
V	51	1: 6,8; 2: 2,5,7,K1; 3: 4,5; 4: 6,7; 5: 6; 6: 4,5; 7: 5,6; 8: 7; 9: 7; 10: 5,6; 11: P2; 12: 1; 15: 4; 17: 4; 18: 4; 19: P2; 21: 4; 22: 5,6; 23: 6; 24: 8; 25: 6; 26: 4,6; 27: P1; 30: 5; 41: 4,6; 42: 3,4,5; 43: 5; 45: 6,8; 46: 1,2,3,5,K1; 47: T4; 49: K1; 50: 4

Kymppi 2 syksy

Kategoria	Yht	Tehtävät
I_a	147	1:2,4,6,K2; 2:1,2,4,5,K2; 3:1,2,4,K2; 4:9,10,K3; 5:5,K2; 6:5; 7:1,2,4,5,K2; 8:1,2,4,K2; 9:1,2,3,4,K1,K2; 10:6,K2; 11:1,3,K2; 12:1,2,3,K1,K2; 13:6,7,K2; 14:T1; 16:2,4,K2; 17:7,K2; 18:2,4,K2; 19:2,4,K2; 20:1,2,3,K1,K2; 21:2; 22:2,3,K2; 23:8,K2; 24:4,5,K2; 25:2,3,K2; 26:9,10,K3; 27:8,K2; 28:1,2,6,K2; 29:T1; 30:4,K2; 31:4,K2; 32:1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,K1,K2; 33:1,2,7,9,K1,K2; 34:5,K2; 35:5,7,K2; 36:7,K2; 37:T1; 38:4,K2; 39:5,K2; 40:4,K2; 41:4,K2; 43:3,K2; 44:4,K2; 46:K2; 47:K2; 48:3,4,K2; 49:1,2,7,8,K3; 50:1,2,7,8,K3; 51:1,6,8,K2
I_b	137	1:3,K1; 2:3,K1; 3:3,K1; 4:1,2,3,4,5,6,7,8,K1,K2; 8:3,K1; 10:1,2,3,4,5,K1,K2; 11:2,K1; 12:5; 13:1,2,3,4,5,K1; 14:T3,T4,T5,T6; 15:1,2,3,4,K1; 16:1,3,K1; 17:1,2,3,4,6,K1; 18:1,3,K1; 19:1,3,K1; 20:5; 21:1,2,3,4,5,6,K1; 22:1,K1; 23:1,2,3,4,5,6,K1; 24:1,2,3,6,K1,K2; 25:1,K1; 26:1,2,3,4,5,6,K1,K2; 27:1,2,3,4,5,6,9,K1; 28:3,4,5,7,8,K1; 29:T2,T3,T4; 33:3,4,5,6,10; 34:3,4,K1; 37:T4; 48:1,2; 49:3,4,5,6,K1,K2; 50:3,4,5,6,10,K1,K2; 51:2,3,4,5,7,K1
I_c	7	17:8; 21:7; 23:7; 27:7,K3; 42:4,K2
II_a	0	
II_b	0	
III_a	0	
III_b	0	
III_c	6	6:1,2,4,K1,K2; 14:T2
IV	9	2:7; 8:6; 9:6; 15:5; 24:7; 25:5; 27:10; 36:8; 51:9
V	60	1:1,5,7; 2:6; 3:5,6,7; 4:12; 7:3,6,8,K1; 8:5; 9:5; 10:7; 11:4,5; 13:8,9; 16:5; 17:9; 18:5; 20:4,6; 21:9,10.; 22:4,5; 23:9,10.; 25:4; 26:11,12; 29:P1,P2; 30:1,2,3,5,K1; 31:1,2,3,5,K1; 32:11; 33:8; 34:6; 35:8; 36:4,5; 37:T2,T3; 46:5; 47:5; 48:5,6,K1; 49:9; 50:9

Kymppi 2 kevät

Kategoria	Yht	Tehtävät
I_a	108	1:1,2,3,4,K1,K2; 2:1,2,3,4,K1,K2; 3:1,2,3,4,K1; 5:1,4,K1; 6:1,2,K1,K2; 7:1,K1; 8:6,K1; 9:2,4,K2; 10:K1; 11:1,K1; 14:T1,T2; 15:7,3; 16:4,K2; 17:4,K2; 18:4; 20:8; 21:1,2,4,K1; 23:1,2,7,8,K1; 24:K3; 25:1,3,K2; 26:2,3,K2; 27:T2; 28:3,5,K3; 29:4,K2; 30:4,K2; 31:3,5,K2; 32:7; 34:7,K4; 35:7,8,K2; 36:8; 37:2,3,4,7,K1,K2; 38:4,K1,K2; 40:4,K2; 41:K2; 42:2,4; 44:1; 45:7; 46:K3; 47:T1; 48:K2; 49:K2; 50:1,2,5,K1; 51:1,K3; 52:3,5,K2,K3
I_b	105	5:2,3,K2; 7:2,3,K2; 8:2,3,4,5,K2; 9:3; 10:1,2,3,4,6,7,K2; 11:3,K2; 12:1,2,3,6,K1; 13:6,7,8,9,K1,K2; 14:T3,T5; 21:3; 22:1,2,3,4,5,6,K1,K2; 23:3,4,5,6; 24:1,2,3,4,5,K1,K2; 25:2,4,K1; 26:1,K1; 27:T3,T4,T5; 33:3; 34:5; 35:3,4,5,6; 36:3,4; 37:5,6; 38:3; 39:T4,T5; 40:1,2,K1; 41:1,2,K1; 42:1,3,K1; 43:2,4; 44:2,3,K1; 45:1,K1; 46:2,K1,K2; 47:T2,T5,T6; 50:3,4,K2; 51:2,3,4,K1,K2
I_c	6	18:K1; 40:3; 41:3; 42:K2; 44:K2; 45:K2
II_a	1	4:5
II_b	1	45:8

III$_{a}$	12	4:1,2,K1,K2; 8:1; 9:1,K1; 33:5,K2; 36:K3; 43:1,K1
III$_{b}$	23	32:1,2,3,4,K1,K2,K3,K4; 33:2,4,K1; 34:1,2,3,4,K1,K2,K3; 36:6,K1,K2; 39:T2,T3
III$_{c}$	6	20:1,2,3,5,K1,K2
IV	4	15:8; 22:9; 24:8; 47:P2
V	59	3:5; 4:3; 5:5,7; 6:3,4,5; 7:5; 8:7,8; 10:8; 11:4,5; 13:10,13; 15:2,3,4,5,6,K1,K2; 16:5; 18:1,5; 19:8; 20:9; 21:5; 22:7,8; 23:10; 24:6,7; 25:5; 26:4,5; 28:6; 29:5; 32:5,8; 33:6; 35:1,K1; 37:8; 38:2,5; 41:4; 43:3; 44:4,5; 45:2; 46:3,6; 47:T3,T4; 49:4; 50:6; 51:6; 52:6

Kymppi 3 syksy

Kategoria	Yht	Tehtävät
I$_{a}$	89	1:1,2,3,K1,K2; 2:2,7,K1,K2; 3:6,K3; 4:6,K3; 5:K2; 6:1,2,5,K2; 7:5; 10:3; 14:T1; 16:3,4,K2; 17:3,7,K2; 18:6,K2; 19:8; 20:K2; 21:3,5,K3; 22:4,K2; 23:1,7,K3; 24:4,K2; 25:5,8,K3; 26:4,K2; 27:2,5,K3; 28:T1; 29:3; 30:2,3,K2; 31:4,K3; 32:5,K3; 33:6,7; 34:3,K2; 35:8,K3; 36:3; 37:8,K2; 38:3,K3; 39:1,2,K1,K2; 40:T1; 42:4,K2; 43:7,K2; 46:5,K2; 47:5,K2; 49:6,K2; 50:6,K2; 52:1,2,K1
I$_{b}$	90	2:1,3,4,5,6,K3,K4; 3:2,3,4,5,7,K1,K2; 4:2,3,4,5,7,8,K1,K2; 6:3,4,K1; 11:7; 13:4; 14:T4,T5; 15:1,2,3,4,6,K1; 16:6,K1; 17:4,K1; 18:1,3,5,K1; 20:2,4; 21:6; 22:2; 23:8; 24:2; 25:6,7,10,K1,K2; 26:2; 29:1,2,K1; 30:4; 31:2,3,K1,K2; 32:1,2,K1,K2; 34:7; 35:1,2,3,4,5,6,K1,K2; 36:1,4; 37:3,4,5,6,9; 38:2; 39:4; 40:T3,T4,T5; 51:2; 52:4
I$_{c}$	23	16:5; 17:5; 18:4; 26:5; 29:4; 30:1,5,K1; 31:1; 32:3,4; 34:1,2; 35:7; 37:1,2,7; 41:4,K2; 44:4,K2; 45:5,K2
II$_{a}$	0	
II$_{b}$	6	11:8; 18:7; 19:9; 31:5; 32:6; 52:3
III$_{a}$	62	3:1; 4:1; 19:1,2,3,4,5,6,7,K1,K2,K3,K4; 20:3,K1; 21:1,2,K1,K2; 22:3,K1; 23:1,2,3,4,K1,K2; 24:3,K1; 25:1,2,3,4,; 26:3,K1; 27:1,K1,K2; 28:T2,T3,T4,T5; 33:1,2,3,4,5,K1; 34:K1; 36:2,K1; 37:K1; 38:1,K1,K2; 40:T2; 43:1,2,6,K1; 48:T1; 51:3
III$_{b}$	0	
III$_{c}$	0	
IV	3	6:7; 17:8; 35:10
V	115	1:4,5,7; 2:9; 3:8; 5:6; 7:1,2,3,4,6,7,K1,K2,K3; 8:1,2,3,4,5,7,K1,K2,K3; 9:1,2,3,4,5,6,8,K1,K2,K3; 10:1,2,5,K1,K2,K3; 11:1,2,3,4,5,6,K1,K2,K3; 12:1,2,3,4,5,6,8,K1,K2,K3; 13:1,2,3,5,K1,K2; 14:T2,T3; 15:5,7; 16:1,2,8; 17:1,2,6; 18:2; 20:1,5; 21:4,7; 22:1,5,6; 23:6,9; 24:1,5,6; 25:9; 26:1,6; 29:5; 30:6; 31:6; 32:7; 33:8; 34:6; 35:9; 36:5; 38:4,5; 39:3; 42:5; 43:3,4,5,8; 46:1,K1; 51:1,4,6,K1,K2; 52:5

Kymppi 3 kevät

Kategoria	Yht	Tehtävät
I$_{a}$	57	1:6,K2; 2:4,K3; 3:11,K2; 4:5,K2; 5:5,K2; 10:3,5,K2; 12:1,2,4,K1; 13:1,2,4,K1; 14:4,K1; 15:T4; 17:5,K2; 20:4; 26:K1; 27:T1; 30:2,K2; 31:6; 32:2,5,K2; 33:4; 34:4; 35:5; 38:T1; 39:4,K2; 40:4,K2; 41:4,K2; 42:5,K2; 43:2; 49:6,K2; 50:6,K2; 51:1,K1; 52:2,K1,K
I$_{b}$	23	10:1,2,K1; 12:3,K2; 13:3,K2; 14:1,2,3,K2,K3; 15:T1,T5; 30:3,K1; 32:3,4,K1; 33:5; 51:2; 52:4,5
I$_{c}$	10	6:6,8; 7:8; 17:K1; 18:5; 28:6,K2; 29:6,K2; 52:3
II$_{a}$	0	
II$_{b}$	16	4:4; 6:2,3,4,5,K2,K3; 7:2,3,4,5,6,K2,K3; 8:T4,T5
III$_{a}$	43	6:1,K1; 7:1,K1; 8:T3; 28:1,2,3,4,5,K1; 29:1,2,3,4,5,K1; 30:1,4; 31:1,2,3,4,5,7,K1; 32:1,6; 34:K1; 36:2,3,5; 37:4; 38:T3,T4; 44:3; 47:3,4,5,6,K1,K2; 48:T4
III$_{b}$	14	6:7; 44:1,2,K1,K2; 45:1,2,K1,K2; 46:1,2,K1,K2; 48:T2
III$_{c}$	14	4:2,3,K1; 11:1,2,3,K1,K2; 15:T3; 18:1,2,K1,K2; 45:7
IV	2	51:6; 52:6
V	139	1:5,7; 2:5; 3:3,4,5,6,7,8; 5:6; 6:9; 9:5; 11:4,5; 13:6; 14:6,7; 16:6; 17:3,6; 18:7; 19:1,2,3,5,K1,K2; 20:1,2,3,K1; 21:1,2,6,K1,K2; 22:1,2,3,5,K1,K2; 23:1,2,3,4,K1,K2; 24:1,2,3,4,5,8,K1,K2; 25:1,2,3,5,K1,K2; 26:1,2,3,4,5,6,K2; 27:T2,T3,T4; 28:7,8,9; 29:7,8,9; 30:5; 31:8; 32:7; 33:1,2,3,6,K1; 34:1,2,3,5,6,K2,K3; 35:1,2,3,4,6,7,K1,K2; 36:1,4,6, K1; 37:1,2,3,5,6,K1,K2; 38:T2; 39:5; 42:6; 44:4,5,6,7,8,K3; 45:3,4,5,8,K3; 46:3,4,5,12,K3; 47:7,8; 48:T3; 51:3,4,5,K2; 52:1

Kymppi 4 syksy

Kategoria	Yht	Tehtävät
I$_{a}$	87	1:1,2,5,K1; 2:1,2,4,6,K1; 3:5,K1,K2; 4:1,2,K1; 5:7,K3; 6:1,2,3,K2; 7:K1,K2; 8:2; 13:T1; 14:5,K2; 15:6; 16:3,K2; 17:3,K2; 18:1,K2; 20:6; 21:3; 25:K3; 27:T1; 28:1,K1; 29:3,4,5,K2; 32:1,5,K1; 34:5; 35:6; 36:4,K2; 37:6,K2; 38:4; 39:T2; 40:5,K2; 41:4,K2; 42:4,K2; 43:10,K5; 44:4,K2; 45:14,K2; 46:4,K2; 47:8,K3; 48:4,K2; 50:K2; 51:5,K2; 52:1,2,3,9,K2; 53:1,2,6,K1; 54:4,K2

I_b	48	1:3,4,K2; 2:3,K2; 3:1,2,3,4,K3; 4:3,4,5,K2; 6:4,5,K1; 7:1,2,4,5,6,K3,K4; 13:T4,T5; 14:4,K1; 18:3,4; 19:7,K1,K2; 32:2,3,K2; 43:2,3,K1,K2; 45:2,K1; 47:1,2,K1,K2; 52:4; 54:6
I_c	2	26:3; 30:5
II_a	0	
II_b	2	22:5; 50:5
III_a	57	12:3,4,5,K1,K2; 14:2,3; 15:1,2,3,4,5,K1; 16:2,4,5,K1; 17:2,4,5,K1; 18:2,5,6,K1; 19:1,2,3,4,5,6,K3; 22:1,2,3,K1; 24:3,4,5,6,7,8; 27:T2; 43:1,4,5,6,7,K3,K4; 45:1; 46:1,K1; 48:K1; 49:T3; 54:1,K1
III_b	0	
III_c	5	30:1,K1; 35:2,5,K1
IV	1	15:9
V	132	1:6,7,8; 2:5,7; 3:6,8; 4:6,8; 6:6; 7:7,9; 8:6,8; 9:1,2,3,K1; 10:1,2,3,4,6,K1; 11:1,2,3,4,5,7,K1,K2; 12:6,7; 13:T2,P1; 14:7; 15:7,8; 16:6; 17:6,8; 18:7,8,9,10; 19:9; 20:1,2,3,4,5,8,K1,K2,K3; 21:1,2,4,5,K1,K2; 22:4,5,K2; 23:1,2,3,4,5,6,K1; 24:1,2,9,K1; 25:1,2,3,4,5,6,K1,K2; 26:1,2,4,5,K1,K2,K3; 27:T3,T4,P1; 28:2,5,K2; 29:7; 30:2,4,6,K2; 31:3,4,6,7,K1,K2; 32:4,6; 33:5; 35:1,4,K2; 36:6; 39:T5,P1; 47:3,4,5,6,7; 49:T4; 52:5,6,7,8,K1; 53:3,4,5,K2

Kymppi 4 kevät

Kategoria	Yht	Tehtävät
I_a	83	2:10; 3:2,7; 4:8; 7:7; 10:9; 12:2; 13:3; 14:1,K1,K2; 15:1,2,K1,K2; 16:1,2,K1,K2; 17:K2; 18:3,K2; 21:K3; 22:T1; 23:4; 24:9; 25:1,2,7,K1,K2; 29:1,2,8,K1; 30:1,2,K1; 31:1,6,K1; 32:1,6,K1; 33:1,2,9,K1; 34:1,6,K1; 35:1,2,3,K1; 36:T1,T2; 38:6; 39:4; 40:4,K2; 41:2,4,K2; 42:4; 43:3,K3; 44:4,8; 45:3; 46:3; 48:8; 49:T3; 50:4,K2; 51:4,K2; 52:1,K1; 53:1,2,K1
I_b	108	3:3,K2,K3; 7:3; 10:1,2,3,4,5,6,7,8,K1,K2,K3,K4; 11:T5,T6; 12:1,K1; 16:3; 17:3; 23:1,2,K1,K2; 24:1,2,3,4,5,6,7,8,K1,K2,K3,K4; 27:1,2,3,4,5,6,K1,K2; 28:1,2,3,K1; 30:3,K2; 31:2,3,4,K2,K3; 32:2,3,4,5,K2,K3; 33:3,4,5,6,K2,K3; 34:2,3,4,5,K2,K3; 35:4,5,6-141,7-141,8-143; 37:8,9; 44:5,K3; 46:4,5,7,K3,K4; 48:2,3,4,5,6,7,K1,K2,K3,K4,K5,K6; 52:7; 53:3,4,5,6,K2,K3
I_c	6	6:6; 23:3,K3; 28:4; 29:7; 35:6-142
II_a	0	
II_b	11	3:1,K1; 6:2; 9:1,2,3,K1,K2; 11:T1,T4; 35:9-143
III_a	119	2:7,8; 3:4,5; 4:1,2,3,4,5,6,K1,K2,K3; 5:1,2,3,4,5,6,K1,K2,K3; 6:1,K1; 7:1,2,4,5,6,K1,K2,K3; 8:1,2,3,4,5,6,K1,K2,K3; 11:T2,T3; 25:3,4,5,6,K3,K4; 26:1,2,3,4,5,6,K1,K2,K3; 27:7,K3; 29:3,4,5,6,K2,K3; 30:4,5,K3; 31:5; 33:7,8; 35:8-141,9-141; 36:T3,T4,T5; 37:1,2,3,4,6,7,K1,K2; 38:K1; 39:K2; 40:1,2,K1; 42:3,K2; 44:6,7,K4; 46:6; 47:1,2,3,4,5,6,7,K1,K2; 49:T2,T4; 54:1,2,3,4,5,6,7,8,9,K1,K2,K3
III_b	29	3:6; 37:11; 38:2,3,5,K2,K3; 41:1,K1; 42:1,K1; 43:1,2,K1,K2; 44:1,2,K1,K2; 45:1,2,5,K1,K2; 46:1,2,K1,K2; 49:T1
III_c	6	8:7; 13:1,2,K1,K2; 22:T3
IV	2	30:8; 31:8
V	106	1:9; 2:3,4,5,6,11,K3,K4; 3:8; 4:9; 5:8,9; 6:5,K2,K3; 7:9; 8:9; 9:5; 10:10; 11:P2,P3; 12:8,9; 13:7; 14:2,5; 15:3,5; 16:5; 17:5; 18:4,5; 19:1,2,3,4,5,6,8,K1; 20:1,2,3,5,K1,K2; 21:4,5,6,7,8,K1,K2; 22:T2,T5,P2; 23:5,6; 24:10,11; 25:8; 26:7; 27:9; 28:5; 29:9,10,; 30:6,7; 32:8; 34:8; 36:P2; 37:10,13,K3; 38:7; 39:6; 40:5; 42:6; 43:4,5,6,8; 44:10; 45:4,6,7,K3; 46:8,9,10; 47:9,10,; 48:9,10.; 52:2,3,4,5,6,9,K2,K3; 53:7,8; 54:10,11

Kymppi 5 syksy

Kategoria	Yht	Tehtävät
I_a	67	1:1,2,K1; 2:1,2, K1; 5:K1; 6:K3; 7:2,K2; 8:1,2,3,K1,K2; 10:K2; 11:R1,R2,R4,K1; 12:T1; 13:2,3,K1; 14:1,K1; 15:K1; 16:9; 18:1,2,3,K1; 19:1,7,K1; 22:K1; 23:R1,R2,K1; 24:T1; 25:4,K2; 26:4,K3; 28:K2; 31:4,K2; 33:K1,K2; 34:K2; 35:T1; 36:15; 37:4,K2; 38:K1; 40:K1; 41:7; 42:K4; 45:K1; 49:1,2,K1; 50:1,2,7,K1; 51:7,K2
I_b	55	1:3,4,5; 2:3,4,5,6,7; 5:1,2,3,4,5; 12:T4,T5; 13:1; 15:4; 16:2,3,4,5,6; 22:5,6,9,K2,K3; 27:1; 29:1; 31:3; 32:3,K1,K2; 34:R5; 36:1,2,3,4,5,7,8,9,10,K1,K2,K3,K4; 38:6; 40:K2,K3; 44:7; 49:3,5,K2; 51:4
I_c	1	2:9
II_a	0	
II_b	13	9:3; 14:8; 15:10; 18:7; 22:11; 27:8,K2; 33:8; 40:9; 42:9; 43:12; 44:K2; 49:7
III_a	73	1:6,7,8,K2,K3; 2:8, K2, K3; 3:K2,K3; 11:R9,R10,K2,K3; 13:K2,K3; 14:K2,K3; 15:1,2,3,K2; 18:K2,K3; 19:K2,K3; 22:7,8,10; 23:R4; 24:T3; 27:2,K1; 28:1,2,K1; 29:2,K1; 30:1,2,6,K1,K2; 34:R4,R6,R7,K1; 35:T2; 38:K2,K3; 43:1,2,3,4,11,K1,K2,K3,K4; 45:R2,K2,K3; 46:T3; 49:4,K3; 50:3,4,5,6,K2,K3; 51:5,K1

III_b	0	
III_c	0	
IV	11	17:9; 20:8; 38:8; 47:1,2,3,K1; 48:1,2,3,K1
V	89	1:9; 3:4; 4:1,7,K1; 5:6,13,K2,K3; 6:2, K1, K2; 7:5,7; 8:4,5,6,7,8,9; 9:1,2,4,5,K1,K2; 10:1,5,6,K1; 11:R5,R6,R8,3; 12:T2,T3,P1; 13:4,11,13; 14:2,3,10; 16:1,10,K1; 17:1,2,8,K1; 18:4,5,; 19:2,9,; 20:1,2,3,4,5,6,7,K1,K2,K3; 21:2,5,K1; 23:R3,R5,R6,R7,R8,4,K2; 24:T2,T4,T5,P1; 28:8; 30:8; 36:17; 37:6; 44:8; 46:P1; 49:6,9; 50:8,9

Kymppi 5 kevät

Kategoria	Yht	Tehtävät
I_a	64	1:1,7,K2; 2:1,8,K1; 3:1,6,K1; 4:1,K1; 5:1,K1; 6:1,K1; 7:1,11,K1; 8:1,K1; 9:1,K1; 10:1,2,7,K1; 11:R2,R3,R4,R5,R6,R7,R8,R9,R10,K1,K2; 12:T1,T2; 13:5; 26:8,K2,K3; 27:2,9; 28:1; 30:10,K2; 31:10,K3; 37:12; 40:3,1; 41:10; 42:9; 43:K1; 44:3; 50:1,K1; 51:1,6,K2; 53:1,2
I_b	83	2:2,3,; 3:2,3,K2; 4:2,3,; 5:K2; 6:2; 7:2,3,; 12:T3; 13:8; 19:5,6,7,8,9,10,K3,K4; 24:R8,R9,K2,K3; 25:T5; 26:1; 27:3,4,5,K2,K3; 28:2,3,4,5,6,7,K2,K3,K4,K5; 29:1,2,3,4,5,6; 32:3,4,5,6; 33:3; 34:4,5,6; 35:R3,R4; 37:7; 39:9,10,11,12,13,16,17,K2,K3; 41:4,5,6,7; 42:6; 43:19; 44:4,5,6,K2,K3; 45:K2,K3; 47:T6; 51:3
I_c	20	1:2,K1; 5:6; 6:3; 32:1,2,K1; 33:1,2,K1; 34:1,2,3,K1; 35:R9,R10,K2; 36:T4; 51:2,K1
II_a	0	
II_b	33	14:1,2,11,12,K1,K2; 15:1,2,3,8,K1,K2,K3; 16:1,2,4,K1,K2; 18:9; 21:3,11; 22:1,9,K2; 24:R1,R3,R4,4; 25:T1,T2; 39:19; 40:12; 44:9
III_a	149	1:3,4,5,6,K3,K4; 2:4,5,6,7,K2,K3; 3:4,5,K3; 4:4,5,6,7,K2,K3; 5:K3; 6:K2,K3; 7:4,5,K2,K3; 8:K2,K3; 9:2,3,K2,K3; 10:K2,K3; 11:R1; 12:T4,T5; 16:3,5; 17:1,2,3,4,K1,K2,K3; 18:1,2,3,4,K1,K2,K3; 19:1,2,3,4; 21:1,2,9,K1,K2,K3; 22:2,7,K1,K3; 23:1,2,K1; 24:R2,R5,R6,R7,K1,K2; 25:T3,T4,T6; 27:1,6,7; 28:8; 29:7,8,K1,K2,K3,K4; 30:1,2,3,4,5,K1; 31:1,2,3,4,K1,K2; 35:R1,R5,R6,R7,R8,; 38:1,2,3,K1,K2,K3; 39:15; 40:K2,K3; 41:K3,K4; 42:K3,K4; 43:K3,K4,K5; 44:7; 45:1,2,3,8,K1; 46:R1,R6,R8,K1; 47:T1,T4,T5; 51:5,K3,K4; 52:5,6,7,8,K2; 53:3,11,K1
III_b	40	20:1,2,3,4,5,6,K1,K2; 24:R10; 37:1,2,3,4,5,6,K1,K2,K3,K4; 40:1,2,K1; 41:1,2,K1,K2; 42:1,2,3,K1,K2; 44:1,2,K1; 46:R2,R3,R4,R5,R9; 47:T2,T3
III_c	4	20:7; 22:3; 27:10; 34:8
IV	3	18:11 (kategorian V tehtävä); 26:4; 35:6
V	89	1:8; 3:7,8; 4:8,1; 5:8; 6:5; 7:13; 8:6,8; 9:14; 10:9; 11:9; 13:4; 14:3,4,5,6,7,8,9,10,13,K3,K4; 15:9,1; 16:6; 17:10,11,12; 18:10,.; 19:15,16,K1,K2; 20:8,9,10; 21:10; 22:8; 23:7,8,9; 28:15,17,K1; 29:13,15; 30:12; 31:11; 32:7,8; 33:4; 34:7; 35:R2,K1; 36:T1,T2,T3; 37:13,14,15,16,17; 39:14,18; 46:4; 48:1,2,3,4,K1; 49:1,3,4,K1; 50:K2,K3; 51:4,7; 52:1,2,3,4,13,14,15,K1

Kymppi 6 syksy

Kategoria	Yht	Tehtävät
I_a	95	1:1,2,3,10,K1; 2:1,2,3,8,K1; 3:1,2,3,K1; 8:1,2,9,K1; 9:K2; 11:R1,R2,R3,R4,R5,R6,R8,K1,K2; 12:T1,T2,T3; 14:1,2,3,K1,K2; 15:1,2,3,K1; 17:1,2,3,6,K1; 18:1,2,K1; 20:1,2,9,K1,K2; 21:3; 23:R1,R2,R4,R5,K1; 24:T1,T2; 25:13,K1; 27:K1; 28:K1; 30:K2; 34:9; 35:9,K1; 43:K1; 44:K1; 45:Tr1,Tr2,Tr3; 46:Tr1,Tr2,Tr3; 47:Tr1,Tr2,Tr3,Tr4; 48:Tr1,Tr2,Tr3,Tr4; 49:Tr1,Tr2,Tr3,Tr4; 50:Tr1,Tr2,Tr3,Tr4; 51:Tr1,Tr2
I_b	83	2:4,5,; 3:6; 4:4; 6:2,3,4,5; 7:2,3,; 8:2; 16:8; 17:K2,K3; 20:11; 23:R7,R9; 25:1,3,5,6,14,17,K2; 26:6; 30:1,2,K1; 31:1,2,3,4,; 32:R1,R7,R8; 33:T3,T4; 34:K2,K3; 35:K2,K3; 36:K2; 37:K2,K3; 38:1,12; 39:2,3,K2; 40:2,3,4,5,K2,K3; 41:R1,R7,R8,K2,K3; 42:T1,T6,P1; 47:1,2,3,4,5,6,14,15,; 50:1,2,3,4,5,6,7,8,17,18,19,21
I_c	3	3:12; 19:4; 26:K3
II_a	0	
II_b	10	4:10; 25:2,4,7,8,15,16,K3; 32:R2; 33:T1
III_a	124	1:4,5,K2,K3; 2:K2,K3; 3:4,5,K2,K3; 4:1,2,3,K1,K2,K3; 5:1,2,3,10,K1,K2,K3; 7:4,5; 10:2,3,4,5,K1,K2,K3,K4,K5,K6; 11:R7,R9; 12:T5,T6; 15:4,9,K2,K3; 17:4,5; 18:3,4,; 19:1,K1,K2,K2; 22:1,2,3,4,5,6,7, 8,K1,K2,K3; 23:R6,R8,R10,K2; 24:T3,T5; 27:K2,K3; 28:K2,K3; 29:2,5; 34:1,2,K1; 35:K4,K5; 36:2,7,K1,K3,K4,K5; 37:2,7,K1,K4,K5; 38:2,3,4,7,K1,K2,K3; 39:4,5,10,K3; 41:R2,R3,R4,R5,K1; 42:T2,T3,T4; 43:K2,K3; 44:K2,K3; 47:Tr5,Tr6; 48:Tr5,Tr6; 49:Tr5; 50:20,22,Tr5; 51:7,8,9
III_b	14	18:9; 39:1,K1; 40:1,K1; 41:R6; 42:T5; 45:Tr4,Tr5; 46:Tr4,Tr5; 51:Tr3,Tr4,Tr5
III_c	3	9:9; 13:3,K3
IV	4	8:11; 11:4; 14:11; 15:11

V	79	2:10; 3:7; 6:1,12,K1; 7:1,8,11,K1; 8:10; 9:10; 10:15; 11:R10; 13:4,9; 14:9,1; 15:10; 16:1,2,3,10,K1,K2; 17:7; 18:11; 19:5,6,7; 20:3,4,10,12,K3; 21:1,2,K1; 23:R3,3; 24:T4,P1; 25:18; 26:K1; 27:2,9; 28:2,9; 29:1,5,7,K1; 30:9; 31:1; 32:R3,R4,R5,R6,4,5,K1; 33:T2; 38:K4,K5; 45:1,2,3,4; 46:1,2,3,4; 51:1,2,3,4,5,6,15,16

Kymppi 6 kevät

Kategoria	Yht	Tehtävät
$\mathrm{I_a}$	49	23:9; 25:15,K4; 26:10,K3; 28:4,K2; 29:R6,K1; 32:1,K1; 36:3; 37:1,2,3,5,K1,K2; 40:R2,R7,R8,K1; 43:K1; 44:Tr1,Tr2; 45:Tr1,Tr2,Tr3; 46:Tr1,Tr2; 47:Tr1,Tr2; 48:Tr1,Tr2,Tr3; 49:Tr1,Tr2; 50:Tr1,Tr2,Tr4; 51:Tr1,Tr2; 52:Tr1,Tr2; 53:Tr1,Tr2,Tr2
$\mathrm{I_b}$	125	11:4,5,6,7,K2,K3; 12:1,2,3,4,5,6,7,8,18,19,K1,K2,K3,K4,K5,K6; 13:K1,K2,K3,K4; 15:10; 17:6; 18:2,5; 19:R3,R4,R5,R6,R7,R8; 23:1,2,11,K1; 24:2,3,4,5,K2,K3; 25:1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,K1,K2,K3; 26:2; 27:3,4,K1,K2; 29:R2,R3,R5,R8,K3; 30:T2,T3,T6; 31:4,5,7,8; 32:4,5,6; 33:2,3; 35:4,5,7,8; 36:1,2,K1,K2; 37:6,15,16; 40:R5,R6,R10,1,K3; 41:T2,T4; 42:13,14,15; 44:7; 45:2,Tr4; 46:1,2,3,4,5,13,14,17; 50:Tr5; 51:Tr3,Tr4; 52:1,2; 53:2,3,4,5,Tr4
$\mathrm{I_c}$	3	32:2,K2; 39:6
$\mathrm{II_a}$	0	
$\mathrm{II_b}$	17	1:1,2,3,4,7,K1,K2; 2:3,8,K2; 6:5; 7:9; 9:R1,R2; 10:T1,T2; 33:8; 49:Tr3,Tr4
$\mathrm{III_a}$	148	2:1,2,K1; 3:1,2,3,K1,K2; 4:1,2,K1,K2; 5:1,2,K1,K2,K3; 6:1,K1,K2; 7:1,2,3,K1,K2,K3; 8:1,2,3,4,5,K1,K2,K3,K4; 9:R3,r4,R5,R6,R7,R8,K1,K2,K3; 10:T3,T4,T5,T6; 13:1,2,3,4,5,6; 14:1,2,3,4,5,6,12,K1,K2; 15:2,3,4,5,K1,K2; 16:1,2,3,4,5,6,8,K1,K2,K3,K4; 17:K1,K2,K3,K4,K5; 19:R9,R10,R11,R12; 20:T3,T4,T5,T6,T7,T8; 21:4,K3; 22:1,2,7,K1,K2; 26:1,3,11,K1,K2; 27:5,6,K3,K4; 29:R7,K2; 30:T5; 33:1,K1; 34:K2; 35:9,1; 37:4,7,8,17,18,K3; 40:R3,R9,R11,K2; 41:T1,T3,T5; 42:K1; 44:8,9,Tr3,Tr4; 46:12,15,16; 47:Tr3,Tr4; 48:Tr4; 50:Tr3; 51:Tr5; 52:Tr4,Tr5; 53:Tr5
$\mathrm{III_b}$	11	3:9; 27:1; 29:R4; 30:T4; 44:Tr5; 45:Tr5; 46:Tr5; 49:Tr5
$\mathrm{III_c}$	5	11:3,9,K4; 17:9; 24:7
IV	5	4:7; 47:1,2,4; 49:2
V	104	1:8; 4:8,9; 5:8; 6:2,6,7; 8:10,11,12; 10:P1,P2; 11:8; 12:20,21,22; 13:7,8,14,15; 14:13; 15:1,11,12,13,14,K3,K4; 16:7,9,K5; 17:7,1; 18:11,K1,K2,K3,K4; 19:R2,2,3,K1,K2,K3; 20:T1,T2,P1,P2; 22:9; 23:8,K2; 25:16,17; 26:12; 29:5; 31:1,3,6,9,K1,K2; 32:3,7,8; 33:4,5,6,7,9; 34:8; 35:2,3,12; 36:10,11; 39:8,9; 40:R1; 41:P1,P2,P3,P4; 42:12; 43:16; 46:Tr3,Tr4; 47:Tr5; 48:4,5,Tr5; 49:1,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16; 52:Tr3; 53:1,1

Liite 2: Oppimateriaalipaketti yhtäsuuruuden ja yhtälöiden opetukseen esikoulusta yläkouluun.
Sini Hänninen, sini.hanninen@iki.fi, 4.6.2020

Yhtäsuuruus esiopetuksessa ja alakoulussa

Oppimateriaali on suunniteltu kestämään pari tuntia, mutta aikaa siihen saa varmasti kulumaan enemmänkin. Tehtävien järjestys on olennainen yhtäsuuruuden käsitteen muodostumisessa, mutta muutoin aktiviteetteja voi jakaa eri päiville. Jokaisen tehtävän jälkeen kannattaa tehdä koonti yhdessä oppilaiden kanssa, jotta voidaan varmistaa, että tehtävän tavoitteet on saavutettu. Ohessa on myös ehdotuksi koontikysymyksiksi. Oppituntisuunnitelmat ovat vain ehdotuksia ja vanhemmille oppilaille voi hyvin ottaa myös yhtälönratkaisupelin. Osan tehtävistä voi hyvin järjestää myös ulko-opetuksena, mitä kannattaa joissakin tilanteissa harkita. Ulko-opetusta varten kaikki paperiset materiaalit on hyvä laminoida, jotta ne kestävät paremmin hiekkaa ja mahdollisia vesiroiskeita, toki ne on järkevää laminoida muutenkin, jotta niitä voi käyttää aina uudelleen ja uudelleen. Esineinä puolestaan voi käyttää esimerkiksi käpyjä tai pikkukiviä.

Keskeiset sisällöt

Lukukäsite, lukusanat, numeromerkit, yhtäsuuruus ja vertailu

Tavoitteet

- Vahvistaa lukumäärän käsitettä luvuilla 0–10.
- Yhdistää lukusanoja, numeromerkkejä ja esineitä.
- Harjoitella yhtäsuurien ja erisuurien määrien hahmottamista ja oikeiden termien käyttöä.
  - Esineistä: ”vähemmän kuin”, ”enemmän kuin” ja ”yhtä monta kuin”
  - Luvuista: ”pienempi kuin”, ”suurempi kuin” ja ”yhtä suuri kuin”
- Ratkaista ensimmäisiä helppoja yhtälöitä päättelemällä käytännön ongelmanratkaisutehtävän avulla.
- Vahvistaa yhtäsuuruuden käsitteen ymmärtämistä.
- Oppia yhtäsuuruusmerkin merkitys.
- Viettää hauska esiopetuspäivä matematiikan parissa leikkien ja laskien.

Oppituntien rakenne

- Päiväohjelman ja oppimistavoitteiden esittely lapsille.
- Lukumäärien harjoittelua leikin avulla. Etsi samanlaiset.
- Lukumäärien vertailua pelin avulla. Vertailua.
- Yhtälönratkaisutehtävän tekoa yhdessä parin kanssa kokeillen. Nallekarkit.
- Parin kanssa tai ryhmässä tasapainovaa’an testaaminen. Vaaka.
- Koonti ja yhtäsuuruusmerkin opettaminen.

Yhtäsuuruus ja yhtälöt yläkoulussa

Oppimateriaali on suunniteltu kestämään noin 75 minuuttia, mutta aikaa siihen saa varmasti kulumaan enemmänkin. Tehtävien järjestys on olennainen yhtäsuuruuden käsitteen muodostumisessa, mutta muutoin aktiviteetteja voi jakaa eri päiville. Jokaisen tehtävän jälkeen kannattaa tehdä koonti yhdessä oppilaiden kanssa, jotta voidaan varmistaa, että tehtävän tavoitteet on saavutettu. Ohessa on myös ehdotuksi koontikysymyksiksi. Osan tehtävistä voi hyvin järjestää myös ulko-opetuksena, mitä kannattaa joissakin tilanteissa harkita. Ulko-opetusta varten kaikki paperiset materiaalit on hyvä laminoida, jotta ne kestävät paremmin hiekkaa ja mahdollisia vesiroiskeita, toki ne on järkevää laminoida muutenkin, jotta niitä voi käyttää aina uudelleen ja uudelleen. Esineinä puolestaan voi käyttää esimerkiksi käpyjä tai pikkukiviä.

Keskeiset sisällöt

Yhtäsuuruus ja erisuuruus

Tavoitteet

- Vahvistaa yhtäsuuruuden käsitteen ymmärtämistä ja oikeiden termien käyttöä.
  - Esineistä: ”vähemmän kuin”, ”enemmän kuin” ja ”yhtä monta kuin”
  - Luvuista: ”pienempi kuin”, ”suurempi kuin” ja ”yhtä suuri kuin”
- Ratkaista helppoja yhtälöitä päättelemällä käytännön ongelmanratkaisutehtävän ja pelin avulla.
- Viettää hauska hetki matematiikan parissa pelaten ja laskien.

Oppitunnin rakenne esimerkiksi

- Tuntiohjelman ja oppimistavoitteiden esittely.
- Vertailua
- Nallekarkit
- Vaaka
- Oppituokio yhtäsuuruudesta
- Yhtälönratkaisupeli

Yhtäsuuruuden läpikäyminen

Heti oppitunnin alussa on hyvä keskustella yhteisesti yhtäsuuruudesta ja siitä, mitä se oppilaiden mielestä tarkoittaa. Erityistä huomioita opettajan kannattaa kiinnittää lasten ja nuorten käsityksiin yhtäsuuruudesta. Tunnin aikana tehtävien koonnin kohdalla on myös mahdollista kuunnella ja havainnoida, ovatko käsitykset muuttuneet oppitunnin aikana. Vaakatehtävän jälkeen on erittäin luonnollinen väli käydä yhdessä läpi, mitä yhtäsuuruus on ja mikä on yhtäsuuruusmerkki.

Tavoitteena on tuoda esiin, että yhtäsuuruusmerkki on kahden asian välinen yhtäsuuruus ja että yhtäsuuruusmerkin molemmilla puolilla täytyy olla yhtä suuret asiat. Esimerkiksi Nallekarkkitehtävän avulla voi hahmotella taululla esimerkkien avulla yhtäsuuruutta. Taululle voi piirtää ympyrät kuvaamaan lautasia ja lautasten alle jonkin tehtävävaiheen luvut. Esimerkiksi Nallekarkkitehtävän kohdassa 2.1 vasemmalla lautasella on neljä karkkia ja oikealla karkkipussi, joten vasemmanpuoleisen lautasen alle kirjoitetaan luku 4. Mietitään uudelleen, kuinka monta karkkia on piilossa pussissa. Kun oikea luku selviää, kirjoitetaan se ylös. Viereen voi laittaa myös haastavamman tilanteen. Esimerkiksi tehtävän 3.1 tilanne, jossa lautasten alle tulevat luvut 1 ja 6. Nyt pohditaan, miten monta karkkia tulisi lisätä vasemmanpuoleiselle lautaselle. On hyvä kiinnittää huomiota oikeisiin ilmaisuihin tässäkin vaiheessa. Kun määrä on keksitty voi sen kirjoittaa taululle lukuna. Palataan pohtimaan ensimmäisen kohdan yhtäsuuruutta.

Pienempiä oppilaita voi kehottaa tulemaan taululle piirtämään merkin, joka kuvaa kahden luvun välistä yhtäsuuruutta. Myös toisesta tilanteesta voi pohtia, miten siinä tulisi toimia, jos yhteenlaskut symbolisella tasolla eivät tunnu ajankohtaisilta, voi tämän kohdan sivuuttaa. Vanhemmille oppilaille kannattaa valita haastavampia tilanteita esimerkeiksi ja pitää huoli, että esimerkeissä yhtäsuuruus ei näy joka tilanteessa suunnassa ”anna vastaus” ja että myös tuntemattoman paikka vaihtelee, aivan kuten Nallekarkkitehtävässäkin.

ETSI SAMANLAISET

Tarvikkeet:

- Erilaisia numerokortteja ja kuvia esineistä luvuilla 0–10.
- 11 purkkia tai purnukkaa, joihin laput kerätään.

Esivalmistelut ja toteutusehdotuksia:

- Järjestä luokkatila siten, että keskellä on paljon tilaa liikkua.
- Merkitse jokaisen rasian kylkeen luku väliltä 0–10 selvillä numeroilla.
- Sekoita valmiiksi kaikki peli- ja kuvakortit.

- Tyhjiksi purkeiksi sopivat esimerkiksi karkkilaatikot.
- Kaikki paperit, joita käyttää, kannattaa laminoida, jos se on mahdollista.
- Hyviä numerokortteja ovat muun muassa UNO-, SkipBo- sekä pelikortit.
- Liitteenä on muutamia lukumääräkuvia, joita voi myös tulostaa ja laminoida.

Johdantotarina:

Pelin kulku:

Ennen aloitusta lapset jaetaan johonkin 11 ryhmästä. Jos lapsille ei riitä pareja tai jos rasioita on enemmän kuin lapsia, voi heille osoittaa useamman rasian.

KOONTI

Istutaan piiriin lattialle ja otetaan jotkin lukulaatikoista ja käydään läpi, ovatko lapset onnistuneet löytämään oikeat luvut ja oikeat määrät esineitä peli- ja kuvakorteista. Lukukortit voi heittää piirin keskelle lattialle kasaan sitä mukaa, kun niitä käydään läpi. Tähän voi käyttää haluamansa ajan. Lopuksi heitetään kaikki loputkin kortit kasaan seuraavaa tehtävää varten.

- Mitä ajatuksia sinulle heräsi tästä tehtävästä?
- Tuntuiko tehtävä haastavalta?
- Mikä luku tuntui helpolta hahmottaa?
- Mikä luku tuntui vaikealta hahmottaa?

VERTAILUA

Tarvikkeet:

- Erilaisia numerokortteja ja kuvia esineistä luvuilla 0–10.

Esivalmistelut ja toteutusehdotuksia:

- Sekoita valmiiksi kaikki peli- ja kuvakortit lattialle tai rasiaan.
- Käy läpi säännöt lasten kanssa.

– Kaikki paperit, joita käyttää, kannattaa laminoida, jos se on mahdollista.
– Hyviä numerokortteja ovat muun muassa UNO-, SkipBo- sekä pelikortit.
– Kuvakortit on hyvä käydä ennen numerokortteja, jotta ilmaisut tulevat tutuiksi. Kortit voi kuitenkin etsiä heti aluksi ajan säästämiseksi.

Johdantotarina:

Nelli ja Ville tarvitsevat teidän apuanne. Heidän tulee matematiikan tunnilla vertailla asioita ja esineitä, mutta he ovat unohtaneet oikeat termit. Esineitä vertailtaessa tulisi käyttää ilmaisuja ”vähemmän kuin”, ”enemmän kuin” ja ”yhtä monta kuin”. Teidän pitää nyt parin kanssa etsiä 10 erilaista kuvakorttia, jotta voitte auttaa lapsia. **Vaiheessa 2:** Lukuja vertailtaessa tulisi käyttää ilmaisuja ”pienempi kuin”, ”suurempi kuin” ja ”yhtä suuri kuin”.

Pelin kulku:

1. Ennen aloitusta lapset jaetaan pareihin.
2. Tehtävänä on etsiä itselle 10 erilaista kuvakorttia (ja 10 numerokorttia).
3. Kun kortit on kerätty, ne käännetään kaikki väärin päin omiksi pakoikseen.
4. Istutaan parin kanssa vastakkain.
5. Molemmat kääntävät yhtä aikaa kortit eteensä.
6. Vuorotellen lapset sanovat ensin oman kuvakorttinsa lukumäärän ja sitten kaverin kortin lukumäärän ja väliin oikean operaation.
   – Kolme karkkia on vähemmän kuin neljä palloa.
   – Kaksi koiraa on yhtä monta kuin kaksi karkkia.

KOONTI

Kerrataan yhteisesti, mitkä olivatkaan ilmaisut, joilla vertaillaan esineitä ja lukuja. Selvitetään oppilailta, miten oikeiden vertailutermien käyttö sujui. On hyvä käydä myös jokin yhteinen esimerkki.

– Mitä ajatuksia sinulle heräsi tästä tehtävästä?
– Tuntuiko tehtävä haastavalta?
– Tuntuiko esineiden vai lukujen vertailu helpommalta?
– Mikä oli helppoa/vaikeaa?

NALLEKARKIT

Tarvikkeet:

Yhdelle parille tarvittavat välineet.

- 10–20 pientä esinettä, esimerkiksi nappeja tai pieniä eläinhahmoja. Myös liitteenä olevia nallekarkkikuvia voi monistaa, leikata erilleen ja laminoida.
- 2 pahvilautasta
- Paperipussi tai jokun muu läpinäkymätön pussi

Vinkkejä ja vaihtoehtoisia välineitä:

– Ulko-opetuksessa nallekarkkikuvien sijaan voi käyttää pikkukiviä tai käpyjä, pahvilautasten sijaan kannattaa tulostaa ja laminoida kuvat eri tilanteista.
– Valmiita nallekarkkikuvia voi myös säilyttää pusseissa, jotka on helppo jakaa oppilaille.
– Halutessaan voi käyttää myös munakennoja, joissa on kymmenen munan kupit.

Esivalmistelut ja toteutusehdotuksia:

Nallekarkkikuvien tulostaminen, leikkaaminen ja laminoiminen, tilannekuvien tulostaminen ja laminoiminen tarvittaessa. Lautasiin voi kirjoittaa valmiiksi nimet Ville ja Nelli. Tilanteet voi myös tulostaa pieneksi vihkoksi oppilaille ja heidän tehtävänsä olisi muodostaa lautasille yksi tilanne kerrallaan. Jos luokassa on mahdollista käyttää dokumenttikameraa tai tietokonetta ja heijastaa kuvat isompana seinälle, se toimisi varmasti myös hyvin. Opettaja voisi heijastaa tilanteen kuvan taululle ja kiertää luokassa varmistamassa, että kaikki saavat alkutilanteen oikein lautasille ja sitten auttaa, jos ongelma ei ratkea.

Apukysymykset ja tarkentavat kysymykset:

Lapsille on hyvä esittää apukysymyksiä, jos tehtävä ei etene. Tavoitteena on, että lapsi saisi onnistumisen kokemuksia ja alkaisi hahmottaa paremmin yhtäsuuruuden käsitettä lautasmallin avulla. Tehtävänannot luetaan lapsille ääneen ja lapset voivat pohtia tehtäviä parinsa kanssa ääneen.

Yhdessä koko luokan kanssa

Johdantotarina:

"Nelli ja Ville ovat karkkipäivänään saaneet nallekarkkeja. Nelli ja Ville haluavat varmistaa, että heillä on koko ajan yhtä monta karkkia, joten heidän lautasillaan tulee olla koko ajan yhtä monta karkkia."

Opettaja osoittaa lautasia ja lisää Nellin ja Villen hahmot näkyviin tms.

"Tässä on Villen lautanen ja tässä Nellin. Molemmilla lautasilla pitää siis koko ajan olla yhtä monta karkkia, jotta karkit menisivät tasan."

Vaihe 1

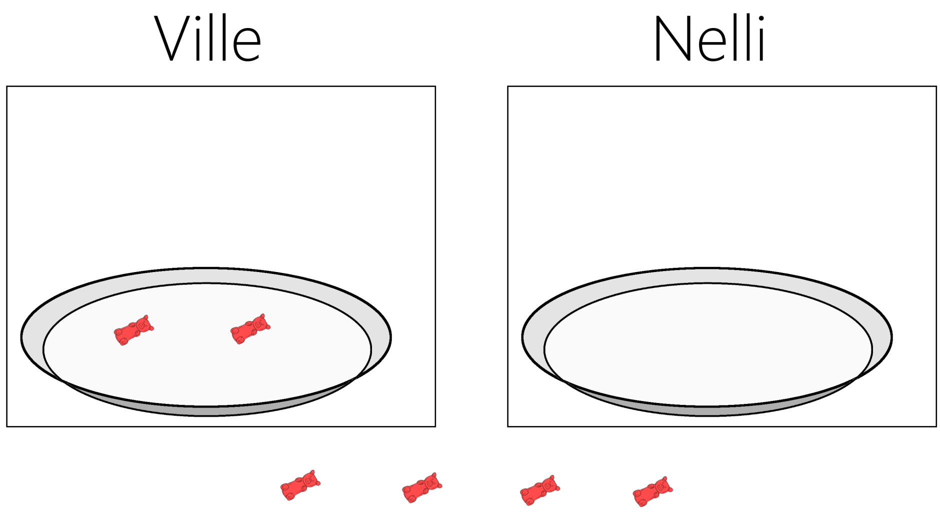
Vaiheen 1 tehtävänanto: "Jaa karkit niin, että molemmilla lautasilla on yhtä monta karkkia."

Opettaja voi tehdä esimerkkitilanteen dokumenttikameralla samalla tehtävän alkutilanteen ääneen lukien ja lapset voivat toistaa tilanteen omien lautastensa kanssa pareittain.

"Pöydällä on neljä karkkia ja Villen lautasella vielä kaksi karkkia. Miten jakaisit karkit niin, että molemmilla lautasilla on täsmälleen yhtä monta karkkia?"

Vaiheen 1 tehtävissä tutustutaan lautasiin ja niiden väliseen yhtäsuuruuteen. Tehtäviä voi keksiä itse lisää lähes rajattomasti.

Tehtävä 1.1 Karkkeja on 4 lautasten etupuolella ja Villen lautasella lisäksi 2 karkkia.

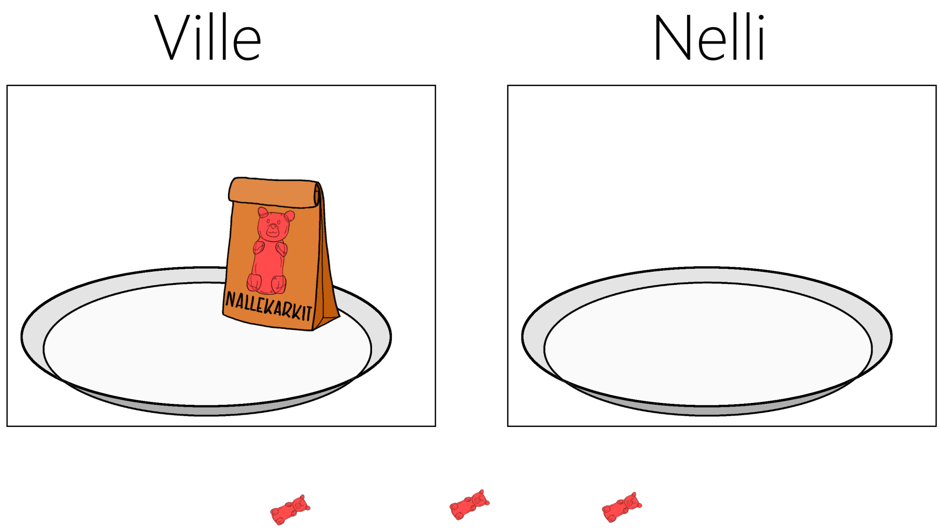


Tehtävä 1.1

Tehtävä 1.2 Karkkeja on 7 lautasten etupuolella ja Nellin lautasella lisäksi 3 karkkia.

Tehtävä 1.3 Karkkeja on 3 lautasten etupuolella ja Villen lautasella lisäksi karkkipussi, jossa kerrotaan olevan 3 karkkia.

Tehtävä 1.4 Karkkeja on 6 lautasten etupuolella ja Nellin lautasella lisäksi karkkipussi, jossa on 2 karkkia. Tämä pitää muistaa kertoa ääneen!



Tehtävä 1.3

Tehtävä 1.5 Karkkeja on 5 lautasten etupuolella, Villen lautasella karkkipussi, jossa on 4 karkkia ja Nellin lautasella 1 karkki.

Koonti vaiheesta 1

Tarkoituksena on herätellä huomaamaan, missä on tuntematon määrä karkkeja ja että lautasilla olevien karkkien määrä vaihtelee, samoin karkkipussissa olevien karkkien määrä.

- Oliko Nellillä ja Villellä koko ajan yhtä monta karkkia?
- Millä tavalla karkkien määrät vaihtelivat?
- Mikä määrä karkkipussissa on karkkeja?

Vaihe 2

Vaiheen 2 tehtävänanto: Selvitä, kuinka monta karkkia on piilossa karkkipussissa.

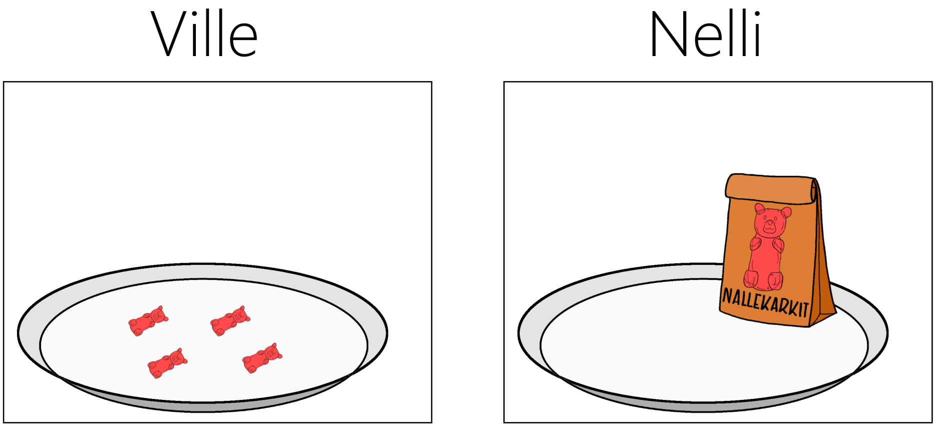
Toisessa vaiheessa mukaan tulee tuntemattoman käsite. Toisella lautasella olevien karkkien lukumäärä vastaa suoraan pussissa olevien karkkien lukumäärää, jolloin vastaus tulisi nähdä melko suoraan tai sen voi helposti laskea. Opettajalla voi olla itsellään kuhunkin tehtävään valmiina pussit, joissa on oikea määrä karkkeja sisällä. Pussin sisällön voi näin paljastaa esimerkiksi dokumenttikameralla lasten arvattua ratkaisun.

Johdantotarina:

”Nelli ja Ville haluavat edelleen, että heillä on lautasilla koko ajan yhtä monta karkkia. Nyt kuitenkin joko Nelli tai Ville on joka vaiheessa piilottanut pussiin jonkin määrän karkkeja ja koettaa saada toisen keksimään, kuinka monta karkkia hän on pussiin laittanut. Osaatko sinä ratkaista, kuinka monta karkkia on piilossa pussissa?”

Tehtävä 2.1 Villen lautasella on 4 karkkia ja Nellin lautasella on karkkipussi.

Tehtävä 2.2 Villen lautasella on karkkipussi ja Nellin lautasella 9 karkkia.



Tehtävä 2.1

Koonti vaiheesta 2

Tarkoituksena on huomata, että karkkipussissa oleva tuntematon määrä karkkeja vaihtelee tehtävien välillä ja että vaikka jotakin ei voi nähdä, se voi silti olla olemassa. Lautasten välistä yhtäsuuruutta myös hahmotetaan. Kaikkia kysymyksiä ei tarvitse käydä läpi, tässä on vain ehdotuksia. Viimeinen kysymys on johdatteleva kysymys kolmanteen vaiheeseen.

- Oliko Nellillä ja Villellä koko ajan yhtä monta karkkia?
- Mitä tarkoittaa, että lautasilla on yhtä monta karkkia?
- Oliko karkkipussissa aina sama määrä karkkeja?
- Millä tavalla karkkien määrät vaihtelivat?
- Mikä määrä karkkipussissa on karkkeja?
- Onko Nellillä ja Villellä edelleen yhtä monta karkkia, jos he kummatkin saavat yhden karkin lisää?

Vaihe 3

Vaihe 3 tehtävänanto: Selvitä, kuinka monta karkkia on piilossa karkkipussissa.

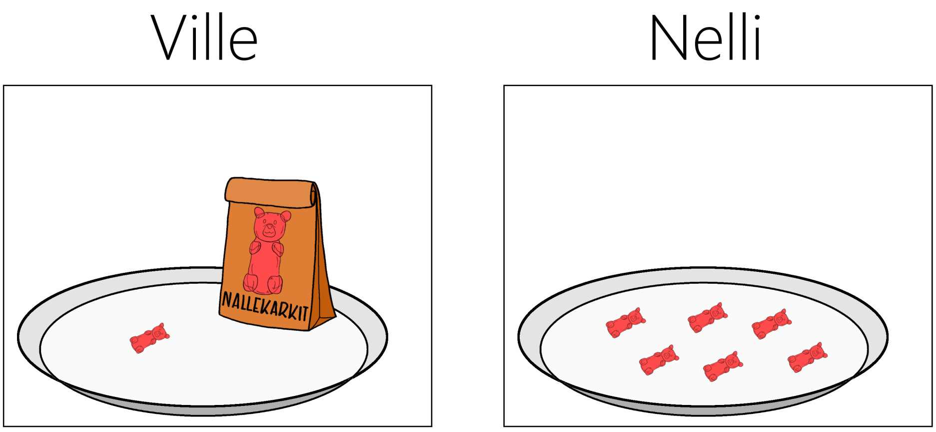
Kolmannessa vaiheessa mukaan tulevat ylimääräiset karkit sille puolelle lautasta, jossa karkkipussi on, alkaen yhdestä karkista.

Lapset saavat ensin miettiä tehtävää rauhassa, mutta jotta vältytään turhautumiselta, vinkkinä voi kysyä: ”Jos Nelli ja Ville kumpikin syövät lautasiltaan yhden karkin, onko heillä edelleen yhtä monta karkkia lautasillaan?”

Lapset voivat tajuta ottaa lautasilta yhdet karkit pois, jolloin jäljellä olevien karkkien määrä kertoo, kuinka monta karkkia pussissa on. Näin toimitaan myös, kun karkkien määrä lisääntyy sillä lautasella, jossa karkkipussi on.

Tässäkin vaiheessa tehtäviä voi keksiä niin paljon kuin tarve vaatii. Alussa voi olla hyvä tehdä useampi vaihe pienillä karkkimäärillä. Mukaan on laitettu vain muutamia esimerkkejä. Muista kuitenkin vaihdella tuntemattoman paikkaa lautasten välillä, eli tässä tapauksessa karkkipussin paikkaa.

Tehtävä 3.1 Villen lautasella on karkkipussi ja 1 karkki ja Nellin lautasella 6 karkkia.

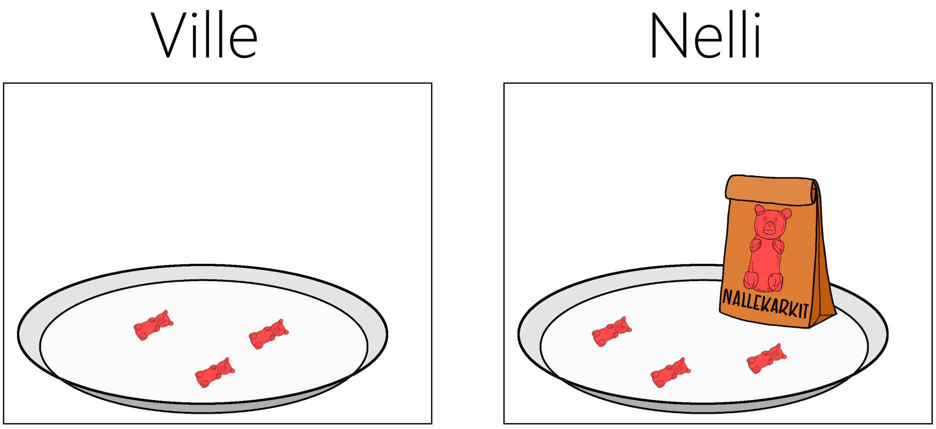


Tehtävä 3.1

Tehtävä 3.2 Villen lautasella on 7 karkkia ja Nellin lautasella on karkkipussi ja 5 karkkia.

Tehtävä 3.3 Villen lautasella on karkkipussi ja 4 karkkia ja Nellin lautasella on 10 karkkia.

Tehtävä 3.4 Nellin lautasella on karkkipussi ja 3 karkkia ja Villen lautasella on 3 karkkia.



Tehtävä 3.4

Koonti vaiheesta 3

Tarkoituksena on huomata edelleen, että karkkipussissa oleva tuntematon määrä karkkeja vaihtelee tehtävien välillä ja että vaikka jotakin ei voi nähdä, se voi silti olla olemassa. Lautasten välinen yhtäsuuruus haastetaan, kun mukana ovat ylimääräiset karkit, jotka pitää saada pois, jotta ratkaisu löytyy. Kaikkia kysymyksiä ei tarvitse käydä läpi, tässä on vain ehdotuksia. Viimeinen kysymys on johdatteleva kysymys neljänteen vaiheeseen.

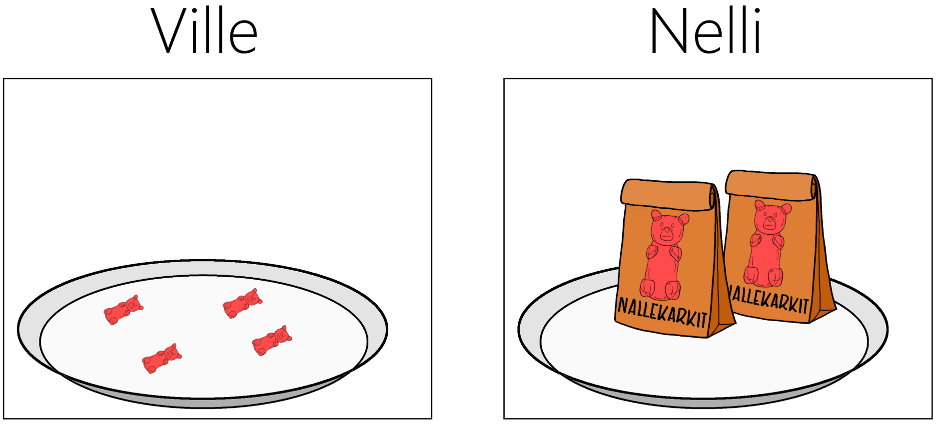
- Oliko Nellillä ja Villellä koko ajan yhtä monta karkkia?
- Oliko karkkipussissa aina sama määrä karkkeja?
- Millä tavalla karkkien määrät vaihtelivat?
- Mikä määrä karkkipussissa on karkkeja?
- Onko Nellillä ja Villellä edelleen yhtä monta karkkia, jos he kummatkin saavat yhtä monta karkkia lisää kuin heillä jo on omilla lautasillaan?

Vaihe 4

Neljännen vaiheen tehtävänanto: Selvitä, kuinka monta karkkia on piilossa karkkipussissa.

Neljännessä vaiheessa mukaan otetaan kahdella jaollisuus. Toiselle lautaselle laitetaankin nyt kaksi karkkipussia ja toiselle parillinen määrä karkkeja. Lasten tulisi tajuta jakaa myös karkit kahteen yhtä suureen osaan. Jos tämä ei onnistu, kannattaa siihen johdatella.

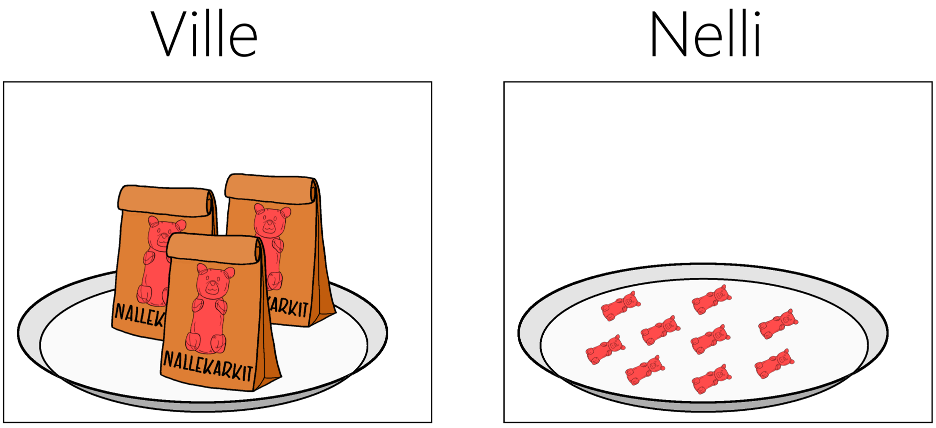
Tehtävä 4.1 Villen lautasella on 4 karkkia ja Nellin lautasella on kaksi karkkipussia.



Tehtävä 4.1

Tehtävä 4.2 Villen lautasella on kaksi karkkipussia ja Nellin lautasella on 8 karkkia.

Tehtävä 4.3 Villen lautasella on kolme karkkipussia ja Nellin lautasella on 9 karkkia.

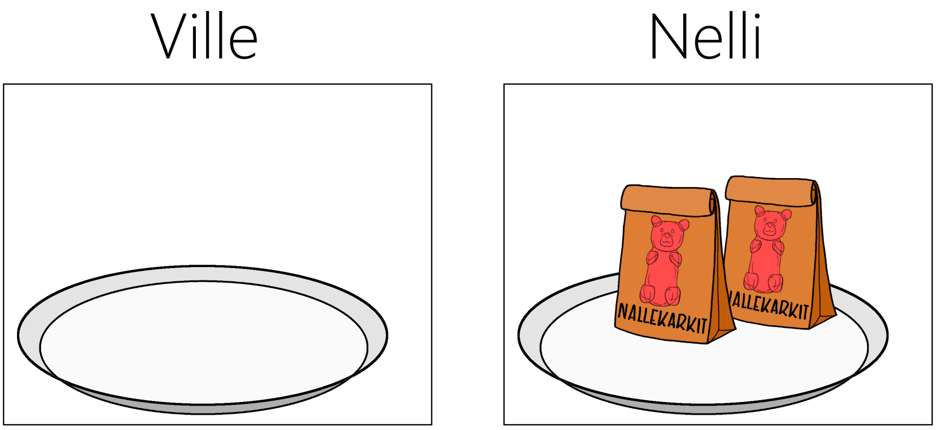


Tehtävä 4.3

Tehtävä 4.4 Villen lautasella ei ole yhtään karkkia ja Nellin lautasella on 2 karkkipussia.

Koonti vaiheesta 4

Tarkoituksena on huomata edelleen, että karkkipussissa oleva tuntematon määrä karkkeja vaihtelee tehtävien välillä ja että vaikka jotakin ei voi nähdä, se voi silti olla olemassa. Lautasten välinen yhtäsuuruus haastetaan, kun mukaan tulee jaollisuus. Kaikkia kysymyksiä ei tarvitse



Tehtävä 4.4

käydä läpi, tässä on vain ehdotuksia. Kaksi viimeistä kysymystä ovat johdattelevia kysymyksiä viidenteen vaiheeseen.

- Oliko Nellillä ja Villellä koko ajan yhtä monta karkkia?
- Oliko karkkipussissa aina sama määrä karkkeja?
- Millä tavalla karkkien määrät vaihtelivat?
- Mikä määrä karkkipussissa on karkkeja?
- Onko Nellillä ja Villellä edelleen yhtä monta karkkia, jos he kummatkin saavat kolme karkkia lisää?
- Onko Nellillä ja Villellä edelleen yhtä monta karkkia, jos he kummatkin saavat yhtä monta karkkia lisää kuin heillä jo on omilla lautasillaan?

Vaihe 5

Tehtävänanto: Ratkaise, kuinka monta karkkia on karkkipussissa.

Viidennessä vaiheessa edelleen toisella lautasella on karkkipusseja, mutta myös jokin määrä ylimääräisiä karkkeja. Yhdistäen kahta edellistä tekniikkaa, lasten pitäisi havaita, että ensin lautasilta otetaan ylimääräiset karkit pois ja sitten jaetaan pussittoman lautasen karkit taas yhtä moneen osaan kuin pusseja on toisella lautasella.

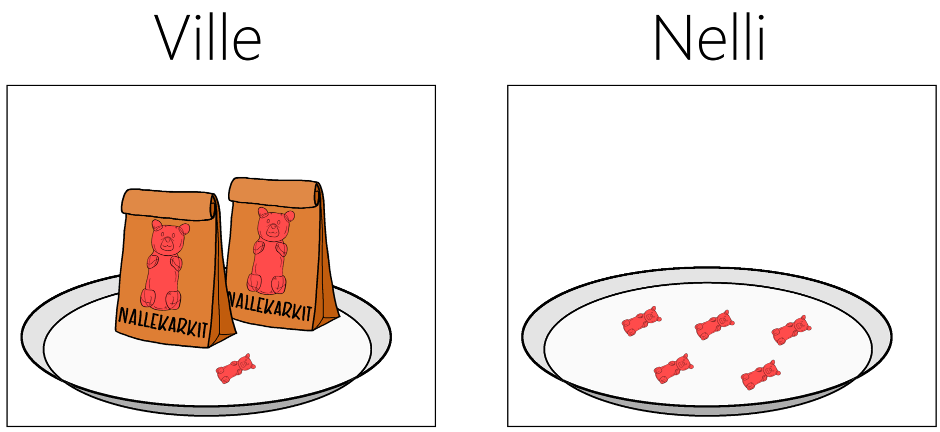
Tehtävä 5.1 Villen lautasella on kaksi karkkipussia ja 1 karkki ja Nellin lautasella on 5 karkkia.

Tehtävä 5.2 Villen lautasella on 5 karkkia ja Nellin lautasella kaksi karkkipussia ja 2 karkkia.

Tehtävä 5.3 Villen lautasella on kaksi karkkipussia ja 5 karkkia ja Nellin lautasella 5 karkkia.

Koonti vaiheesta 5

Tarkoituksena on huomata edelleen, että karkkipussissa oleva tuntematon määrä karkkeja vaihtelee tehtävien välillä ja että vaikka jotakin ei voi nähdä, se voi silti olla olemassa. Lautasten välinen yhtäsuuruus haastetaan, kun mukaan tulee jaollisuus ja vielä ylimääräiset karkit. Kaikkia



Tehtävä 5.1

kysymyksiä ei tarvitse käydä läpi, tässä on vain ehdotuksia. Viimeinen kysymys on johdatteleva kysymys kuudenteen vaiheeseen.

- Oliko Nellillä ja Villellä koko ajan yhtä monta karkkia?
- Oliko karkkipussissa aina sama määrä karkkeja?
- Millä tavalla karkkien määrät vaihtelivat?
- Mikä määrä karkkipussissa on karkkeja?
- Onko Nellillä ja Villellä edelleen yhtä monta karkkia, jos he kummatkin saavat yhden karkkipussin lisää?

Vaihe 6

Tehtävänanto: Ratkaise karkkipussissa olevien karkkien määrä.

Kuudennessa vaiheessa karkkipusseja on molemmilla lautasilla. Nyt lasten tulisi tajuta ottaa molemmilta lautasilta yhdet karkkipussit pois, jolloin toiselle puolelle jää yksi karkkipussi ja toiselle lautaselle sen sisältämä määrä karkkeja.

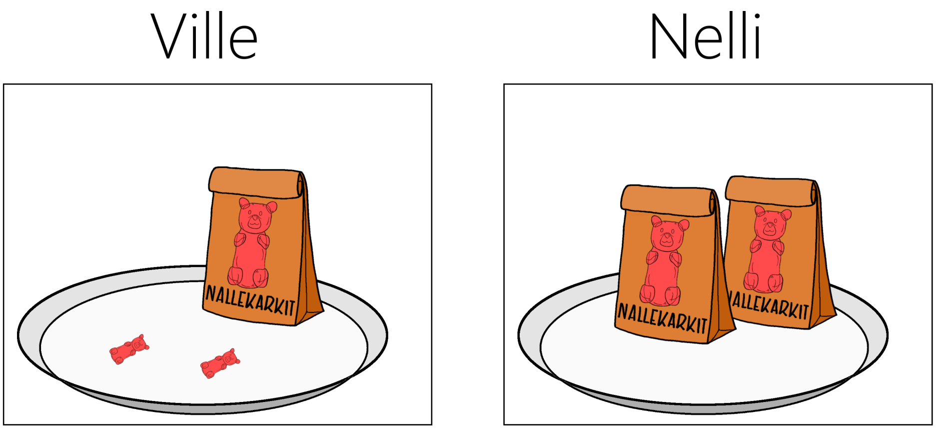
Pussiyhtälötehtäviä pystyy vaikeuttamaan vielä lisäämällä esimerkiksi erivärisiä tai mallisia karkkeja ja kaikkiin vaiheisiin voi keksiä lukuisia eri tilanteita. Esikouluikäisille ei kuitenkaan ole tähän materiaaliin laitettu vaihetta 6 vaikeampia tehtäviä.

Tehtävä 6.1 Villen lautasella on yksi karkkipussi ja 2 karkkia ja Nellin lautasella on kaksi karkkipussia.

Tehtävä 6.2 Villen lautasella on kaksi karkkipussia ja Nellin lautasella on yksi karkkipussi ja 5 karkkia.

Koonti vaiheesta 6

Tarkoituksena on huomata edelleen, että karkkipussissa oleva tuntematon määrä karkkeja vaihtelee tehtävien välillä ja että vaikka jotakin ei voi nähdä, se voi silti olla olemassa. Lautasten välinen yhtäsuuruus haastetaan, kun mukaan tulee jaollisuus ja vielä ylimääräiset karkkipussit. Kaikkia kysymyksiä ei tarvitse käydä läpi, tässä on vain ehdotuksia. Jos lapset onnistuvat tehtävissä hyvin ja aikaa riittää, voi karkkipussien määrää lautasilla edelleen lisätä ja lisätä myös ylimääräisten karkkien määrää.



Tehtävä 6.1

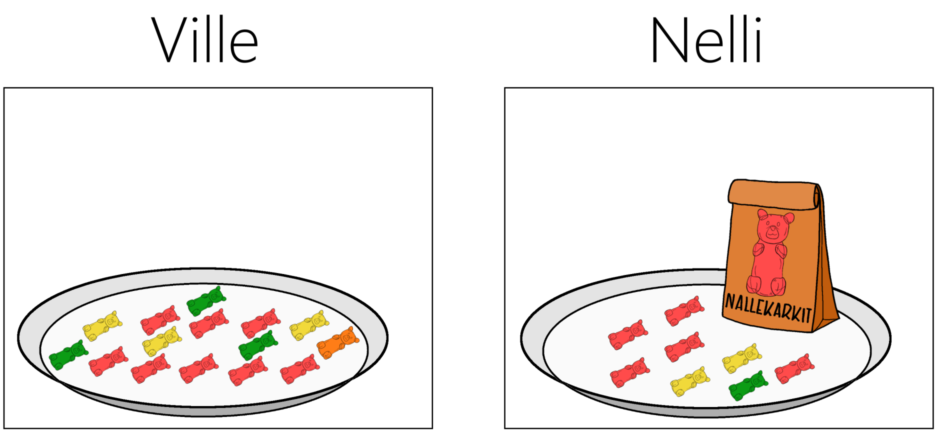
- Oliko Nellillä ja Villellä koko ajan yhtä monta karkkia?
- Oliko karkkipussissa aina sama määrä karkkeja?
- Millä tavalla karkkien määrät vaihtelivat?
- Mikä määrä karkkipussissa on karkkeja?

KOONTI

- Mitä ajatuksia sinulle heräsi Nallekarkkitehtävästä?
- Tuntuivatko tehtävät haastavilta?
- Mikä tehtävä tuntui helpolta/vaikealta? Miksi?

Lisähuomioita

Tehtäviä voi myös vaikeuttaa lisäämällä vaikkapa puolikkaita karkkeja tai erivärisiä karkkeja mukaan. Miten esimerkiksi ratkaistaisiin seuraavan kuvan tilanne?



Haatavampi tehtävä

VAAKA

Vaa'an kanssa harjoittelua. Jos käytössä on tasapainovaaka ja punnuksia, käytetään sellaista. Tärkeintä on, että lapset pääsevät itse testaamaan vaa'an käyttöä. Punnuksina voi käyttää valmiita punnussettejä tai esimerkiksi lasikuulia. Alussa kannattaa tarjota helppoja tehtäviä ja siirtyä sitten haastavampiin. Etevimmille voi keksiä myös tehtäviä, jossa punnuksia pitääkin laittaa molemmille puolille vaakaa.

Jos vaakoja on vain yksi, voivat muut samalla harjoitella esimerkiksi ilmaisen GCompris-sovelluksen "Tasapainota vaa'at oikein" -tehtävää. Sovellus on ladattavissa niin tietokoneelle, tableteille kuin puhelimiin. Pelin alussa tehtävät ovat helppoja, eli vaakaa täydennetään vain vasemmalle puolelle ja oikealla puolella on "vastaus". Kuitenkin tehtävät vaikeutuvat ja luvut suurenevat. Vastaan tulee myös muun muassa tilanteita, joissa punnuksia täytyy lisätä kummallekin puolelle vaakaa, jotta tasapaino löytyy.

Tasapainovaa'an voi tehdä myös itse näillä yksinkertaisilla välineillä.

- Henkari, joka pysyy hyvin tasapainossa
- Kaksi viili- tai jogurttipurkkia
- Kaksi piippurassia
- Sakset tai piikki reikien tekoon
- Punnuksia, esimerkiksi lasikuulia

Itsetehty tasapainovaaka.

YHTÄLÖNRATKAISUPELI

Välineet:

- Valmiiksi tulostetut yhtälöt
- Magneetteja, nuppineuloja tai sinitarraa kiinnitykseen
- Isokärkinen tussi tai taululiituja tai valkotaulutusseja

Esivalmistelut ja huomioita:

Tulostetaan luokan oppilaiden määrän mukaan tarvittava lukumäärä laskutoimitustehtäviä, mieluiten A4-koossa. Nämä sekoitetaan ja kiinnitetään nurinpäin taululle tai seinälle. Oljenkorret voi kiinnittää tehtäväpaperien viereen tai laittaa tarvittaessa vaikka maahan. Järjestetään oppilaille riittävästi tilaa liikkua luokassa vähintään jonossa liikkumisen mahdollistama tila. Muiden ryhmien vastauksia ei ole tietenkään tarkoitus katsoa. ”Lunttaamisen” välttämiseksi jokaisen ryhmän tehtäväpaperit sekoitetaan ja ne sijaitsevat taululla siten eri kohdissa. Opettaja pelinjohtajana tarkkailee ryhmien toimintaa.

Pelin kulku:

1. Jaetaan luokan oppilaat noin viiden hengen ryhmiin tai isompiin tai pienempiin riippuen luokkahuoneen koosta ja oppilaiden lukumäärästä.
2. Oppilaat laitetaan jonoon satunnaisessa järjestyksessä ja selitetään pelin ohjeet.
3. Jokainen oppilas käy vuorollaan jonosta kääntämässä yhden tehtäväpaperin ja vastaa siinä annettuun kysymykseen kirjoittamalla vastauksen taululle tai tehtäväpaperiin riippuen käytössä olevista välineistä.
4. Kun kysymykseen on vastattu, vie oppilas kynän tai liidun jonossa seuraavalle ja siirtyy jonon perälle.
5. Seuraava oppilas menee nyt taululle ja kääntää jonkin toisen tehtäväpaperin.
6. Näin jatketaan, kunnes kaikki tehtäväpaperit on käännetty ja vastaukset löydetty.
7. Jos oppilas ei osaa ratkaista kohdalleen sattunutta tehtävää, voi hän käyttää yhden kolmesta ryhmälle annetusta oljenkorresta.
   - **Vihreä lappu.** Oppilas voi kysyä koko omalta ryhmältään vastausta tehtävään, kirjoittaa vastauksen taululle ja siirtyä jonon perälle.
   - **Keltainen lappu.** Oppilas voi kysyä jonossa takanaan olevalta ryhmän jäseneltä vastausta tehtävään ja kirjoittaa vastauksen taululle. Molemmat menevät tämän jälkeen jonon perälle.
   - **Punainen lappu** Oppilas voi kysyä opettajalta vinkkiä tehtävään, mutta tällöin joukkue saa myös 10 sekunnin jäähyn, jonka aikana ei saa tehdä mitään.
   - **Huom!** Ryhmä voi käyttää jokaisen oljenkorren vain yhden kerran pelin aikana.
8. Kun ryhmä saa vastattua kaikkiin tehtäviin, palaavat kaikki ryhmän jäsenet jonoon, nostavat kädet ylös ja huutavat: ”Valmis!”
9. Peli pysähtyy ja opettaja siirtyy tarkistamaan tehtävien vastaukset. Jos jokin vastauksista on väärin, peli käynnistetään uudelleen. Ryhmän jäsenet käyvät jälleen yksitellen vastaamassa kysymyksiin ja yrittävät löytää virheen.
10. Se ryhmä, joka ensimmäisenä saa kaikki vastaukset oikein, voittaa.

LISÄTEHTÄVÄ: Ohjelmointiprojekti

Koodatkaa oppilaiden kanssa jokin yksinkertainen yhtälönratkaisupeli. Oppilaat voivat tehdä pelin muille oppilaille ratkaistavaksi tai omaksi ilokseen. Hyvä idea on tehdä ohjelmointitehtävä pareittain esimerkiksi viiden minuutin vaihdoilla. Tämän linkin takaa löytyy Scratch-yhtälöpeli malliksi siitä, millainen peli voisi esimerkiksi olla: `https://scratch.mit.edu/projects/301556565`. Ohjeita tehtävään ei ole valmiina, mutta koodia pääsee katsomaan. Lisäksi Linkki-ohjelmointikerhon materiaaleista löytyy monenlaisia valmiita ohjelmointiohjeita `https://linkki.cs.helsinki.fi/fi/materials/search`.

Ratkaisut Nallekarkkitehtäviin

Tehtävä 1.1 Ratkaisu. Neljästä karkista 3 Nellin lautaselle ja 1 Villen lautaselle. Molemmilla siis 3 karkkia.

Tehtävä 1.2 Ratkaisu. Seitsemästä karkista 2 Nellin lautaselle ja 5 Villen lautaselle. Molemmilla siis 5 karkkia.

Tehtävä 1.3 Ratkaisu. Kaikki 3 karkkia Nellin lautaselle. Molemmilla siis kolme karkkia.

Tehtävä 1.4 Ratkaisu. Kuudesta karkista 2 Nellin lautaselle ja 4 Villen lautaselle. Molemmille siis neljä karkkia.

Tehtävä 1.5 Ratkaisu. Viidestä karkista 4 Nellin lautaselle ja 1 Villen lautaselle. Molemmille siis viisi karkkia.

Tehtävä 2.1 Ratkaisu. Pussissa on 4 karkkia, sillä Villen lautasella on neljä karkkia ja lautasilla täytyy olla sama määrä karkkeja.

Tehtävä 2.2 Ratkaisu. Pussissa on 9 karkkia, sillä Nellin lautasella on yhdeksän karkkia ja lautasilla täytyy olla sama määrä karkkeja.

Tehtävä 3.1 Ratkaisu. Pussissa on 5 karkkia, sillä Nellin lautasella on kuusi karkkia ja lautasilla täytyy olla sama määrä karkkeja. Nelli ja Ville voivat syödä yhdet karkit lautasilta. (Otetaan siis molempien lautasilta 1 karkki pois, jolloin Nellin lautaselle jäävä karkkien määrä on sama kuin pussissa olevien karkkien määrä, eli $6 - 1 = 5$.)

Tehtävä 3.2 Ratkaisu. Pussissa on 2 karkkia, sillä Villen lautasella on seitsemän karkkia ja lautasilla täytyy olla yhtä monta karkkia. Ville ja Nelli voivat syödä tai ottaa pois yhtä monta karkkia lautasilta ja heillä on silti lautasillaan yhtä monta karkkia. (Otetaan siis molempien lautasilta 5 karkkia pois, jolloin Nellin lautaselle jäävä karkkien määrä on sama kuin pussissa olevien karkkien määrä, eli $7 - 5 = 2$.)

Tehtävä 3.3 Ratkaisu. Pussissa on 6 karkkia, sillä Nellin lautasella on kymmenen karkkia ja lautasilla täytyy olla sama määrä karkkeja. Ville ja Nelli voivat syödä yhtä monta karkkia lautasilta ja heillä on edelleen lautasilla yhtä paljon karkkeja. (Otetaan siis molempien lautasilta 4 karkkia pois, jolloin Nellin lautaselle jäävä karkkien määrä on sama kuin pussissa olevien karkkien määrä, eli $10 - 4 = 6$.)

Tehtävä 3.4 Ratkaisu. Pussissa ei ole yhtään karkkia, sillä Villen lautasella on kolme karkkia ja lautasilla täytyy olla sama määrä karkkeja. Ville ja Nelli voivat syödä yhtä monta karkkia lautasilta ja heillä on edelleen lautasilla yhtä paljon karkkeja. (Otetaan siis molempien lautasilta 3 karkkia pois, jolloin Villen lautaselle jäävä karkkien määrä on sama kuin pussissa olevien karkkien määrä, eli $3 - 3 = 0$.)

Tehtävä 4.1 Ratkaisu. Yhdessä pussissa on 2 karkkia, sillä Villen lautasella on neljä karkkia ja lautasilla täytyy olla sama määrä karkkeja. Karkkipusseissa on oltava yhtä monta karkkia, joten toisella lautasella voi järjestää karkit yhtä moneen osaan. (Jaetaan siis Villen lautasen karkit kahteen yhtäsuureen osaan, jolloin yhdessä kasassa oleva karkkien määrä on sama kuin pussissa olevien karkkien määrä eli 2.)

Tehtävä 4.2 Ratkaisu. Yhdessä pussissa on 4 karkkia, sillä Nellin lautasella on kahdeksan karkkia ja lautasilla täytyy olla sama määrä karkkeja. Karkkipusseissa on oltava yhtä monta karkkia, joten toisella lautasella voi järjestää karkit yhtä moneen osaan. (Jaetaan Nellin lautasen karkit kahteen yhtä suureen osaan, jolloin yhdessä kasassa oleva karkkien määrä on sama kuin pussissa olevien karkkien määrä eli 4.)

Tehtävä 4.3 Ratkaisu. Yhdessä pussissa on 3 karkkia, sillä Nellin lautasella on yhdeksän karkkia ja lautasilla täytyy olla sama määrä karkkeja. Karkkipusseissa on oltava yhtä monta karkkia, joten toisella lautasella voi järjestää karkit yhtä moneen osaan. (Jaetaan Nellin lautasen karkit kolmeen osaan, jolloin yhdessä kasassa oleva karkkien määrä on sama kuin pussissa olevien karkkien määrä eli 3.)

Tehtävä 4.4 Ratkaisu. Kummassakaan pussissa ei ole yhtään karkkia, sillä Villen lautasella ei ole yhtään karkkia ja lautasilla täytyy olla sama määrä karkkeja.

Tehtävä 5.1 Ratkaisu. Yhdessä pussissa on 2 karkkia, sillä Nellin lautasella on viisi karkkia ja lautasilla täytyy olla sama määrä karkkeja. Ensin molemmilta lautasilta voi poistaa taas yhtä suuret määrät karkkeja. Tämän jälkeen karkkipusseissa on edelleen oltava yhtä monta karkkia, joten toisella lautasella voi järjestää karkit yhtä moneen osaan. (Otetaan kummaltakin lautaselta yksi karkki pois. Jaetaan sitten Nellin lautasen neljä karkkia kahteen osaan, jolloin yhdessä kasassa oleva karkkien määrä on sama kuin pussissa olevien karkkien määrä eli 2.)

Tehtävä 5.2 Ratkaisu. Yhdessä pussissa on 3 karkkia, sillä Villen lautasella on kahdeksan karkkia ja lautasilla täytyy olla sama määrä karkkeja. Ensin molemmilta lautasilta voi poistaa taas yhtä suuret määrät karkkeja. Tämän jälkeen karkkipusseissa on edelleen oltava yhtä monta karkkia, joten toisella lautasella voi järjestää karkit yhtä moneen osaan. (Otetaan kummaltakin lautaselta kaksi karkkia pois. Jaetaan sitten Villen lautasen kuusi karkkia kahteen osaan, jolloin yhdessä kasassa oleva karkkien määrä on sama kuin pussissa olevien karkkien määrä eli 3.)

Tehtävä 5.3 Ratkaisu. Yhdessä pussissa on 0 karkkia, sillä Nellin lautasella on viisi karkkia ja Villen lautasella myös. Molemmilta lautasilta voi poistaa yhtä suuret määrät karkkeja ja sen jälkeen jakaa jäljelle jääneet. (Otetaan kummaltakin lautaselta viisi karkkia pois. Nellin lautaselle ei jää yhtään karkkia jaettavaksi ja karkkien määrä on sama kuin pussissa olevien karkkien määrä eli 0.)

Tehtävä 6.1 Ratkaisu. Pussissa on 2 karkkia, sillä Nellin lautasella on karkkipussi ja kaksi karkkia ja lautasilla täytyy olla sama määrä karkkeja. Koska karkkipusseissa on myös yhtä monta karkkia, voi molemmilta lautasilta poistaa yhden karkkipussin. (Otetaan molempien lautasilta 1 karkkipussi pois, jolloin Villen lautaselle jäävä karkkien määrä on sama kuin pussissa olevien karkkien määrä eli 2.)

Tehtävä 6.2 Ratkaisu. Pussissa on 5 karkkia, sillä Villen lautasella on karkkipussi ja viisi karkkia ja lautasilla täytyy olla sama määrä karkkeja. Koska karkkipusseissa on myös yhtä monta karkkia, voi molemmilta lautasilta poistaa yhden karkkipussin. (Otetaan molempien lautasilta 1 karkkipussi pois, jolloin Nellin lautaselle jäävä karkkien määrä on sama kuin pussissa olevien karkkien määrä eli 5.)